فصلنامه علمی – پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی – سال سیزدهم، شماره۳۸، پاییز ۹۴
صفحات ۱۸۲ - ۱۶۳

یکپارچه‌سازی مسائل زمانبندی تولید و تحویل با رویکرد مسیریابی وسیله نقلیه با ناوگان ناهمگن

محمد باقر فخرزاد،* زهره نور محمد زاده**

تاریخ دریافت: ۹۴/۴/۱۰ تاریخ پذیرش: ۹۴/۷/۱۳

چکیده

این مقاله مسأله زمانبندی تولید و تحویل را با هم درنظرمی‌گیرد و سعی در یکپارچه‌سازی این دو مسأله دارد. سفارش خرده‌فروشان شامل انواع مختلف محصولات بوده که در یک مرکز توزیع کننده پردازش می‌شوند. پس از تکمیل سفارش در این مرکز، محصولات در پنجره زمانی به خرده‌فروش تحویل داده می‌شود، در غیر این صورت مرکز توزیع‌کننده باید جریمه انحراف از پنجره زمانی را به خرده‌فروش بپردازد. هدف از حل این مسأله تعیین توالی تولید، نیاز خرده‌فروش به وسیله نقلیه ناهمگن، ترتیب ملاقات خرده فروشان با توجه به پنجره زمانی تحویل، می‌باشد. در این مقاله، یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی عدد صحیح مختلط ارائه شده است بطوریکه هزینه‌ی کل شامل هزینه مسیریابی، هزینه ثابت وسیله نقلیه و هزینه جریمه انحراف از پنجره زمانی کمینه گردد. برای حل مدل ارائه شده در این مقاله از دو رویکرد حل‌کننده CPLEX نرم‌افزار GAMS-24-1 و الگوریتم آزادسازی لاگرانژ استفاده شده است. در ابتدا با استفاده از نمونه مثال‌های متفاوت کارایی الگوریتم آزادسازی لاگرانژ در اندازه‌های کوچک اثبات شده و جهت به دست آوردن یک حل بهینه قابل قبول در اندازه‌های بزرگ در یک بازه زمانی قابل قبول از این الگوریتم استفاده می‌شود.

واژگان کلیدی:
زمانبندی تولید و تحویل، مسیریابی وسیله‌نقلیه، الگوریتم آزادسازی لاگرانژ، پنجره زمانی، ناوگان ناهمگن

---

* استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد (نویسنده مسئول) (mfakhizad@yazd.ac.ir)
** کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد

مقدمه

تحت محیط تولیدی رقابتی فعلی، شرکت‌ها بیشتر روی هماهنگی مراحل مختلف یک زنجیره تامین تاکید دارند. برای تولیدکنندگان تلاش برای بهینه‌سازی زنجیره تامین که شامل هماهنگی مسائل زمانبندی تولید و تحویل بوده، مسأله چالش برانگیزی شده است. تحقیقات نشان می دهد که حل مجزا هر کدام از مسائل زمانبندی در مرحله توزیع کننده و تحویل سفارش به خرده‌فروشان، حل بهینه را نخواهد داد. بنابراین تلاش بر این است که هماهنگی موثری بین این دو مسأله برقرار شود. این مقاله دو مرحله از زنجیره تامین، شامل مرکز توزیع کننده و خرده‌فروشان را مورد بررسی قرار داده است. مرکز توزیع کننده برای رقابت بیشتر باید تصمیم بگیرد سفارشات را پس از تکمیل در پنجره زمانی به خرده‌فروشان تحویل دهد. در صورت دیرکرد یا زودکرد تحویل به خرده‌فروش این مرکز باید هزینه جریمه انحراف از پنجره زمانی را به خرده‌فروش بپردازد. مرکز توزیع کننده برای بررسی سفارش خرده‌فروش، عملیاتی همچون چیدن، دسته‌بندی و پردازش را در یک ایستگاه‌کاری انجام می‌دهد. عملیات ارسال به خرده فروش با رویکرد مسیریابی وسیله نقلیه و با در نظر گرفتن حداقل هزینه کل صورت می گیرد. به دلیل ظرفیت محدود انبار مرکز توزیع کننده و خرده‌فروش، مرکز توزیع کننده باید تصمیم بگیرد، چه ترکیبی از وسایل نقلیه موجود، توالی تولید، ترتیب ملاقات خرده‌فروشان، زمان حرکت از مرکز توزیع کننده به نحوی که علاوه بر حداقل‌سازی هزینه کل، رضایت هر چه بیشتر خرده‌فروشان نیز فراهم شود. هزینه کل شامل هزینه مسیریابی و هزینه ثابت مالکیت وسیله‌نقلیه، هزینه جریمه انحراف از پنجره زمانی خرده-فروش می‌باشد.

مرور ادبیات:

بسیاری از تحقیقاتی انجام شده در حوزه یکپارچه‌سازی زمان‌بندی تولید و تحویل به صورت محصولات دسته‌بندی شده، تحت فرضیات و توابع هدف متنوعی می‌باشند.

اولین بار بحث یکپارچه‌سازی زمان‌بندی تولید و توزیع توسط پاتز توسعه داده شد. هدف حداقل کردن ماکزیمم زمان تحویل سفارش‌ها است. این مقاله شامل زمان‌های حمل‌ونقل می‌باشد ولی هزینه‌ها و ظرفیت حمل‌ونقل را در نظر نمی‌گیرد(Potts, 1980). از این مقاله به بعد محققان به این حوزه علاقه‌مند شدند، البته از ۲۰۰۱ به بعد مقالات کار شده بسیار بیشتر از مقالاتی‌ست که در مدت ۱۹۸۰–۲۰۰۰ کار شده است. اما اعتقاد بر این است که علم در این زمینه با سرعت بسیار زیادی در دو دهه اخیر رشد کرده است. (Lee & Chen, 2001) ، (Sung & Kim, 2003)، (Chang & Lee, 2004)، (Li et al., 2005) محدودیت‌های ظرفیت روی تحویل دسته‌ای را در نظر گرفتند و فقط تعدادی توابع زمان‌بندی شامل ماکزیمم زمان تکمیل، مجموع زمان‌های تکمیل، ماکزیمم دیرکردها، تعداد کارهای تاخیری و کل تاخیرها را بدون در نظر گرفتن هزینه‌های تحویل حداقل کردند. (Lin et al., 2007)، (Yan & Tang, 2009)، (Day et al., 2009) مسائل متنوع زمان‌بندی ماشین برای دسته کارهای تحویل داده شده بعد از پردازش را تحت فرضیه‌ی ظرفیت‌های نامحدود وسیله نقلیه و هزینه تحویل، آنالیز کردند. (Qi, 2005) حالتی را در نظر گرفت که مواد اولیه در دسته‌هایی برای پردازش کارها به تک ماشین تحویل داده می‌شوند و تصمیمات مربوط به تحویل مواد اولیه و توالی کارها، همزمان انجام می‌شود. او یک الگوریتم شاخه و کران برای حداقل کردن مجموع هزینه‌های تحویل و زمان در جریان تعیین کرد. (Amstrang, 2008)، مسأله زمان‌بندی یکپارچه با تحویل دسته‌ای به چند مشتری با روش مسیریابی و محدودیت پنجره تحویل را در نظر گرفتند. هدف انتخاب مجوعه‌ای از سفارشات تحویل داده شده به نحوی که تقاضای تحویل سفارش ماکزیمم شود. اگرچه به مسأله زمانبندی تولید و تحویل توجه ویژه‌ای شده است اما مقالات کمی این مسأله را در محیط تولید کابردی بررسی کرده‌اند. (Naso et al., 2007) روی تحویل بتن مخلوط آماده تمرکز کردند. آنها محدودیت زمانی برای جلوگیری از دیرکرد و زودکرد تحویل در نظرگرفتند. هدف هزینه کل شامل هزینه حمل و نقل، هزینه‌های انتظار برای بارگیری و تخلیه و هزینه‌های مرتبط به برون‌سپاری محصول، اجاره کامیون‌ها کمینه گردد. (Chen, 2010)

اخیرا، یک مقاله مروری درباره مسائل زمان‌بندی یکپارچه تولید و توزیع، منتشر کرده است که این حوزه را پوشش می‌دهد. (Low et al., 2013)، هماهنگی زمان‌بندی مسأله تولید و تحویل با ناوگان ناهمگن را مورد بررسی قرار دادند و یک الگوریتم ژنتیک توافقی برای حل مدل ارائه داده‌اند.

با توجه به مرور ادبیات بررسی شده هیچکدام از پژوهش‌ها برای بررسی مسأله زمانبندی تولید و تحویل با فرضیات در نظرگرفته، از الگوریتم لاگرانژ استفاده نکرده‌اند تا عملکرد این الگوریتم را بر روی این دسته از مسائل بررسی کنند. تجربه نشان داده است که الگوریتم لاگرانژین می‌تواند بسیار سریع به بالاترین کران پایین ممکن قابل دستیابی(جواب نزدیک بهینه) برسد. از آنجاییکه قسمتی از این مسأله زمانبندی تولید و تحویل مسأله مسیریابی وسیله نقلیه است و آن یک مسأله NP-hard است، پس مسأله زمانبندی تولید و تحویل نیز یک مسأله NP-hard می‌باشد و به دست آوردن جواب بهینه برای آن بسیار زمانبر است، در این پژوهش با استفاده از الگوریتم لاگرانژ پیچیدگی مسأله کاهش داده می‌شود و جوابی نزدیک بهینه در زمان قابل قبولی ارائه داده می‌شود.

سازمان‌دهی ادامه‌ی مقاله بدین صورت می‌باشد. در بخش بعدی مسأله‌ی مورد نظر شرح داده شده است، در بخش سوم مدل پیشنهادی تفسیر و تحلیل گردیده و در ادامه در بخش چهارم جهت افزایش کارایی مدل موردنظر الگوریتم آزادسازی لاگرانژ به کار گرفته شده است. در بخش پنجم جهت اعتبار سنجی مدل و الگوریتم پیشنهادی یک مثال عددی حل و در نهایت در بخش آخر نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای آیندگان آورده شده است.

شرح مسأله

یک زنجیره تامین دو مرحله‌ای با یک مرکز توزیع‌کننده و $N=\{1,2,...,n\}$ خرده‌فروش در نظر بگیرید. مرکز توزیع‌کننده همانند یک مرکز تولیدی نیز می‌باشد، بطوریکه برای بررسی سفارش خرده‌فروشان عملیاتی همچون چیدن، دسته‌بندی، پردازش را در یک ایستگاه‌کاری

انجام می‌دهد. مرکز توزیع‌کننده محصولات مختلفی را که یک خرده‌فروش سفارش می‌دهد در یک دسته قرار داده، به نحویکه کل تقاضاهای خرده فروشان برآورده شود. این دسته‌ها به منظور سهولت در تحویل پس از تکمیل درون یک کانتینر بارگیری می‌شوند و عملیات ارسال به خرده‌فروش به صورت مستقیم یا با دسته‌های سایر خرده فروشان با رویکرد مسیریابی وسیله‌نقلیه و با در نظر گرفتن حداقل هزینه کل صورت می‌گیرد. مرکز توزیع‌کننده باید سفارش را در پنجره زمانی $[a_i,b_i]$ به خرده‌فروش i تحویل دهد در غیر اینصورت مرکز باید جریمه دیرکرد یا زودکرد موعد تحویل را به خرده‌فروش بپردازد. هزینه کل شامل هزینه ثابت مالکیت وسیله نقلیه، هزینه مسیریابی و هزینه جریمه انحراف از پنجره زمانی تحویل می‌باشد. سایر فرضیات مسأله در زیر شرح داده شده است:

هرخرده فروش در یک موقعیت جغرافیایی بوده و تقاضایی دارد.

وسیله نقلیه متعلق به خود مرکز توزیع‌کننده است.

زمان بارگیری وسیله نقلیه ناچیز است.

در هر مسیر، وسیله نقلیه از مرکز توزیع‌کننده شروع و در نهایت به آن باز می‌گردد.

هرخرده‌فروش فقط یک بار ملاقات می‌شود و باید کل تقاضای آن برآورده شود.

زمان راه‌اندازی تولید دسته‌های مختلف ناچیز است.

وسایل نقلیه ناهمگن بوده و محدودیتی در تعداد وسیله نقلیه وجود ندارد.

استفاده از هر نوع وسیله نقلیه یک هزینه ثابتی دارد که باید پرداخته شود.

مجموع تقاضای خرده‌فروشان در هر مسیر نباید از ظرفیت وسیله‌نقلیه تجاوز کند.

هزینه‌های حمل‌ونقل به مسافت پیموده شده وادسته است (مسافت پیموده شده متناسب با زمان سفر است)

حال با توجه به فرضیات ذکر شده مدل ریاضی ارائه می‌گردد.

مدل ریاضی

در ابتدا جهت مدلسازی مسأله مورد نظر به تعریف مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرها بـه صـورت زیر پرداخته می‌شود.

اندیس‌ها و مجموعه‌ها:

i, j : اندیس برای خرده‌فروشان

k : اندیس برای وسیله نقلیه

N_0 : مجموعه خرده‌فروشان همراه با مرکز توزیع کننده

N : مجموعه خرده‌فروشان

L : مجموعه وسایل نقلیه

پارامترها و متغیرهای غیرتصمیم:

ξ_i : زمان پردازش هر واحد از سفارش خرده‌فروش i

d_i : تقاضای خرده فروش i

υ_{ij} :هزینه (مسافت/زمان) هر واحد محصول از خرده فروش i به j

υ_{0j} : هزینه(مسافت/زمان) هر واحد محصول از مرکز توزیع‌کننده به خرده‌فروش j

δ_i : زمان خدمت(سرویس‌دهی) به خرده‌فروش i

γ_k :هزینه ثابت مالکیت وسیله نقلیه k

Cap_k :ظرفیت وسیله نقلیه k

Ω_i: متغیرهای جریان وابسته به خرده‌فروش i، در واقع متغیـر Ω_i میـزان تقاضـای کـل را کـه یک وسیله نقلیه روی مسیر خود سرویس می‌دهد بعد از اینکه به خرده‌فروش i می‌رسد.

$[a_i, b_i]$: پنجره زمانی تحویل سفارش به خرده‌فروش i

p_e : جریمه تحویل زودکرد هر سفارش

p_l : جریمه تحویل دیرکرد هر سفارش

متغیرهای تصمیم:

ς_{ik}: بیشترین زمان تکمیل خرده‌فروش i در مرکز توزیع‌کننده برای وسیله نقلیه k

μ_{ij}: برابر ۱ در صورتی که خرده‌فروش i قبل از خرده‌فروش j در مرکز توزیع‌کننده باشد، ۰ در غیر این صورت.

φ_{0i}: زمان حرکت از مرکزتوزیع‌کننده به خرده‌فروش i.

θ_{ij}: جریمه به علت انحراف از پنجره زمانی در هر کمان (i, j)

x_{ijk}: برابر۱ در صورتی که خرده‌فروش j بلافاصله بعد از خرده‌فروش i با وسیله نقلیه k ملاقات شود، ۰ در غیر این صورت.

x_{0jk}: برابر۱ در صورتی که خرده‌فروش j بلافاصله بعد از مرکز توزیع‌کننده با وسیله نقلیه k ملاقات شود، ۰ در غیر این صورت.

t_i: زمان رسیدن به خرده‌فروش i.

$$\min Z = \sum_{k\in L}\gamma_k \sum_{j\in N} x_{0jk} + \sum_{k\in L}\sum_{j\in N_0}\sum_{i\in N_0} \upsilon_{ij} x_{ijk} + \sum_{k\in L}\sum_{j\in N_0}\sum_{i\in N_0}\theta_{ij} x_{ijk} \quad (۱)$$

s.t.

$$\sum_{k\in L}\varsigma_{ik} - \xi_i d_i \ge 0, \forall i \in N \quad (۲)$$

$$\sum_{k\in L}\varsigma_{jk} - \xi_j d_j \ge \sum_{k\in L}\varsigma_{ik} + M(\mu_{ij} - 1), \forall i \in N, j \in N \quad (۳)$$

$$\mu_{ij} + \mu_{ji} = 1, \forall i \in N, j \in N \quad (٤)$$

$$\varsigma_{ik} \le M \sum_{j\in N_0} x_{ijk}, \forall i \in N, k \in L \quad (۵)$$

$$\sum_{j\in N_0}\sum_{k\in L} x_{ijk} = 1, \forall i \in N \quad (٦)$$

$$\sum_{i\in N_0} x_{ijk} = \sum_{i\in N_0} x_{jik}, \forall j \in N_0, k \in L \quad (۷)$$

$$\Omega_0 = 0 \quad (۸)$$

$$\Omega_j - \Omega_i \ge (d_j + Cap_K)\sum_{k\in L} x_{ijk} - Cap_K, \forall j \in N, i \in N_0, k \in L \quad (۹)$$

$$\Omega_j \le \sum_{k\in L}\sum_{i_0\in N} Cap_k x_{ijk}, \forall j \in N \quad (۱۰)$$

$$t_j \geq t_i + \delta_i + \upsilon_{ij} - M(1 - x_{ijk}), \forall i \in N, j \in N, k \in L \quad (11)$$

$$t_i \geq \varphi_{0i} + \upsilon_{0i} - M(1 - \sum_{k \in L} x_{0ik}), \forall i \in N, k \in L \quad (12)$$

$$\varphi_{0i} \geq \sum_{k \in L} \varsigma_{ik} - M(2 - \sum_{k \in L} x_{0ik} - \sum_{k \in L} x_{ijk}), \forall i \in N, j \in N \quad (13)$$

$$\varphi_{0i} \geq \sum_{k \in L} \varsigma_{jk} - M(2 - \sum_{k \in L} x_{0ik} - \sum_{k \in L} x_{ijk}), \forall i \in N, j \in N \quad (14)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\Big[\left(a_i - t_i\right)^+ p_e + (t_i - b_i)^+ p_l\Big] + \frac{1}{2}\Big[\left(a_j - t_j\right)^+ p_e + (t_j - b_j)^+ p_l\Big]$$
$$, \forall i \in N, j \in N, t \in L$$
$$\left(a_i - t_i\right)^+ = \max\left\{0, a_i - t_i\right\} \quad (15)$$
$$(t_i - b_i)^+ = \max\left\{0, t_i - b_i\right\}$$

$$\varphi_{0i} \geq 0, \forall i \in N \quad (16)$$

$$\varsigma_{ik} \geq 0, \forall i \in N, k \in L \quad (17)$$

$$t_i \geq 0, \forall i \in N \quad (18)$$

رابطه (۱) تابع هدف مدل را نشان می‌دهد که در عبارت اول هزینه ثابت مالکیت وسایل نقلیه را بیان کرده و عبارت دوم به هزینه مسیریابی وسیله نقلیه و عبارت سوم به هزینه جریمه انحراف از پنجره زمانی تحویل اشاره دارد.

محدودیت‌های (۲)-(۵) محدودیت‌های مسأله زمان‌بندی تولید را نشان می‌دهند. محدودیت شماره (۲) تضمین می‌کند دسته در مرکز توزیع‌کننده فقط زمانی می‌تواند تکمیل و آماده برای ارسال شود که در ایستگاه کاری پردازش شده باشد. محدودیت شماره (۳) بیان می‌کند که در مرکز توزیع‌کننده یک دسته (سفارش خرده‌فروش) نمی‌تواند قبل از دسته قبلی‌اش که تکمیل شده، تکمیل شود. محدودیت شماره (۴) بیان می‌کند که هر دسته فقط می‌تواند قبل یا بعد از دسته دیگر برای هر جفت دسته j, i باشد، در واقع بیان می‌کند دسته i یا قبل از دسته j است یا بعد از آن. محدودیت شماره (۵) تضمین می‌کند که هر سفارش خرده‌فروش باید قبل از تحویل، در مرکز توزیع‌کننده پردازش شود.

محدودیت‌های (۶)-(۹) محدودیت‌های نگهداری جریان مسأله مسیریابی وسیله‌نقلیه برای مسأله تحویل می‌باشد. محدودیت شماره (۶) بیان می‌کند که هر وسیله نقلیه دقیقاً یک‌بار

خرده‌فروش j را ملاقات کند و شروع و پایان هر مسیر باید از مرکز توزیع‌کننده باشد. محدودیت شماره (۷) نشان می‌دهد که هر وسیله نقلیه ورودی به خرده فروش i، باید این خرده فروش را ترک کند. محدودیت (۸)-(۱۰) محدودیت‌های حذف زیرتور و تجاوز نکردن از ظرفیت وسیله نقلیه می‌باشند. محدودیت (۱۱) زمان رسیدن به خرده‌فروش j را تعیین می‌کند. محدودیت (۱۲) زمان رسیدن به خرده فروش i که بلافاصله بعد از مرکز توزیع-کننده ملاقات می‌شود را تعیین می‌کند. محدودیت (۱۳)-(۱۴) رابطه‌ی بین دو متغیر y_{0i} و x_{ijk} بیان می‌کند که در واقع محل اتصال و یکپارچه‌سازی مسأله زمانبندی تولید و مسأله تحویل است. محدودیت (۱۵) جریمه انحراف از پنجره زمانی را برای هر کمان (i, j) محاسبه می‌کند. محدودیت (۱۶)–(۱۸) محدودیت برای مثبت بودن متغیرها می‌باشد.

روش حل

برای حل مدل ریاضی ارائه شده از دو رویکرد به صورت حل مدل با استفاده از حل کننده CPLEX نرم‌افزار GAMS و الگوریتم آزادسازی لاگرانژ استفاده شده است که در زیر ارائه می‌شوند.

حل با CPLEX توسط نرم افزار GAMS-24-1

حل کننده CPLEX در نرم افزار GAMS یک حل کننده بسیارخوب برای مدل‌های ریاضی خطی در مسائلی با ابعاد کوچک می‌باشد اما همین حل کننده جهت مسائل با ابعاد بزرگ زمان حل زیادی را به خود اختصاص می‌دهد. این امر برای مدل یک ضعف به حساب می‌آید به همین دلیل در این مقاله برای رفع این مشکل از روش آزاد سازی لاگرانژ استفاده شده است.

حل با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ

در این قسمت، از الگوریتم آزاد سازی لاگرانژ توضیح داده شده در [۱۴] استفاده می‌شود و مدل مسأله با استفاده از آزاد سازی لاگرانژ ارائه می گردد.

با توجه به اینکه بیشترین پیچیدگی مدل در دو محدودیت (۱۱) و (۱۳) و (۱۴) می‌باشد. پس در الگوریتم لاگرانژ سه محدودیت گفته شده آزاد می‌شوند. لذا مدل لاگرانژ مساله را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned}\min Z = \min Z = &\sum_{k\in L}\gamma_k\sum_{j\in N}x_{0jk} + \sum_{k\in L}\sum_{j\in N_0}\sum_{i\in N_0}\upsilon_{ij}x_{ijk} + \sum_{k\in L}\sum_{j\in N_0}\sum_{i\in N_0}\theta_{ij}x_{ijk}\\ &+\sum_{k\in L}\sum_{j\in N}\sum_{i\in N}\psi^1{}_{ijk}\left[t_i+\delta_i+\upsilon_{ij}-M(1-x_{ijk})-t_j\right]\\ &+\sum_{j\in N}\sum_{i\in N}\psi^2{}_{ij}\left[\sum_{k\in L}\varsigma_{ik}-M(2-\sum_{k\in L}x_{0ik}-\sum_{k\in L}x_{ijk})-\varphi_{0i}\right]\\ &+\sum_{j\in N}\sum_{i\in N}\psi^3{}_{ij}\left[\sum_{k\in L}\varsigma_{jk}-M(2-\sum_{k\in L}x_{0ik}-\sum_{k\in L}x_{ijk})-\varphi_{0i}\right]\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

s.t.

(۱۸-۱۵)و(۱۲)و(۱۰-۱) (۲۷)

که در عبارت (۲۶) مقادیر پارامترهای $\psi^3_{ijk}, \psi^2_{ij}, \psi^1_{ij}$ به‌صورت $\psi^3_{ij} \geq 0, \psi^2_{ij} \geq 0, \psi^1_{ijk} \geq 0$، جهت برقراری رابطه $Z_D(\psi) \leq Z$ می‌باشد.

روش‌های مختلفی از جمله روش subgradient، روش surrogate subgradient، روش تصحیح ضرایب، روش تولید ستون، روش bundle و روش cutting plane جهت به روز کردن ضرایب لاگرانژ وجود دارد اما روش متداول در این زمینه روش اول یعنی روش subgradient است. برنامه نویسی این روش بسیار آسان بوده و در مساله‌های بسیاری عملکرد بسیار خوبی داشته است. این روش، روشی تکرارشونده است که از یکسری مقادیر اولیه برای ضرایب لاگرانژ آغاز می کند. سپس با یک رویه سیستماتیک مقدار این ضرایب

لاگرانژ تغییر می‌کنند. هدف بیشینه کردن مقدار کران پایین ایجاد شده توسط مساله لاگرانـژین با پیدا کردن بهترین مقادیر ضرایب لاگرانژ است.
فرض شود که محدودیت $\sum_j a_{ij} x_j \le b_i, \forall i$ باید به تابع هدف انتقال پیدا کنـد لـذا گـام‌هـای روش subgradient را می‌توان به صورت زیر خلاصه سازی نمود:
گام (۱): π پارامتری است که توسط کـاربر در بـازه $0 < \pi \le 2$ تعریـف مـی‌شـود. Z_{UB}: یـک جواب موجه مساله اصلی (کران بالا) با روشهای ابتکاری است. ψ_i : مقادیر دلخواه اولیـه بـرای ضرایب لاگرانژ.
گام (۲): مساله لاگرانژین را با ضرایب لاگرانژ حـل کنیـد. مقـدار متغیرهـای تصـمیم را در ایـن مرحله (X_j) و مقدار کران پایین مساله در این Z_{LB} را تعیین کنید.
گام (۳): برای هر محدودیت آزاد شده یک subgradient به نام G_i به صورت زیـر تعریـف کنید:

$$G_i = \sum_j a_{ij} x_j - b_i, \forall i$$

گام (۴): یک طول قدم اسکالری با عنوان T بصورت زیر تعریف کنید:

$$T = \pi \left(Z_{UB} - Z_{LB} \right) \Big/ \sum_i G_i^2$$

توصیه می‌شود که در ابتـدا مسـاله را بـا $\pi=2$ حـل کنیـد. اگـر در تعـداد مشخصـی از تکرارهـا بهبودی در مقدار تابع هدف مساله $Z_D(\psi)$ ایجاد نشد مقدار π را نصف کنید.
گام (۵): مقدار ψ_iرا به کمک رابطه زیر به روز کنید. به گـام دو برویـد و مسـاله لاگرانـژین را با ضرایب جدید لاگرانژین حل کنید.

$$\psi_i = \max\left(0, \psi_i + TG_i\right), \forall i$$

لازم به ذکر است که می‌توان ضابطه پایان را تعداد مشخصی از تکرارها و یا رسیدن مقدار π به حدی مشخص (با توجه به کاهش مقدار آن در هر تکرار) تعیین کرد.

جدول ۱: مقایسه دو رویکرد حل کننده‌ی CPLEX نرم‌افزار GAMS-24-1 و روش آزادسازی لاگرانژ

ردیف	نوع مساله		زمان حل		Rate of Time	مقدار تابع هدف		Rate of Cost
	k	n	*Cplex* -gams	*Lagrangian*		*Cple x -gams*	*Lagrangian*	
۱		۲	۰/۱۱	۰/۶۷	−۵/۰۹۱	۵۴۵	۵۴۵	.
۲		۳	۰/۱۲	۰/۶۸	−۴/۶۶۷	۵۴۶./۱۳	۵۶۲	۰/۰۲۸
۳		۴	۰/۲۵	۰/۸۲	−۲/۲۸	۴۳۲	۴۳۲	.
۴		۵	۰/۳۴	۰/۹۳	−۱/۷۳۵	۶۷۸/۲	۷۲۸	۰/۰۶۸
۵		۶	۱/۴۱	۱/۴۸	−۰/۰۵	۷۴۱/۷	۸۰۲	۰/۰۷۵
۶	۲	۷	۷/۱۹	۴/۵	۰/۳۷۴	۵۰۶	۵۲۵	۰/۰۳۶
۷		۸	۵۱/۴۵	۱/۱۳	۰/۹۷۸	۵۳۲/۹۸	۵۶۶	۰/۰۵۸
۸		۹	۲۸/۹۴	۱۰/۹	۰/۹۶۲	۶۵۸/۱۵	۶۸۵	۰/۰۳۹
۹		۱۰	۳۶۰۰ *	۱/۰۳	۰/۹۹۹	۵۹۹/۸۷ **	۶۵۸	۰/۰۸۸
۱۰		۲	۰/۱	۰/۶۸	−۵/۸	۵۱۸	۵۱۸	۰
۱۱		۳	۰/۱۳	۰/۸۱	−۵/۲۳۱	۴۳۳	۴۳۳	۰
۱۲		۴	۰/۲۷	۰/۸۳	−۲/۰۷۴	۴۴۲/۵	۴۴۹	۰/۰۱۴
۱۳		۵	۰/۴۶	۱/۰۵	−۱/۲۸۳	۶۷۲/۲۱	۶۹۸	۰/۰۳۷
۱۴		۶	۱/۷۵	۱/۳۳	۰/۲۴	۴۷۵/۷	۵۲۳	۰/۰۹
۱۵	۳	۷	۹/۸۹	۰/۸۸	۰/۹۱۱	۴۸۳	۵۷۴	۰/۱۵۹
۱۶		۸	۱۰۰/۷	۱/۳۴	۰/۹۸۷	۵۱۲/۲۱	۶۴۶	۰/۲۰۷
۱۷		۹	۱۱۳۹	۱	۰/۹۹۹	۶۰۳	۸۲۰	۰/۲۶۵
۱۸		۱۰	۳۶۰۰ *	۱/۲۵	۰/۹۹۹	۵۰۶/۷۵ **	۶۹۹	۰/۲۷۵
۱۹		۲	۰/۱۱	۰/۶۸	−۵/۱۸۲	۴۷۹	۴۷۹	۰

۲۰	۴	۳	۰/۱۳	۰/۸۲	−۵/۳۰۸	۴۰۸/۱۶	۴۱۹	۰/۰۲۶
۲۱		۴	۰/۲۶	۰/۸۲	−۲/۱۵۴	۴۳۴/۱۷	۴۴۷	۰/۰۲۹
۲۲		۵	۰/۷۶	۱/۱۳	−۰/۴۵۷	۶۸۷	۷۱۱	۰/۰۳۴
۲۳		۶	۲/۴۶	۰/۸۹	۰/۶۳۸	۴۶۸	۵۰۵	۰/۰۷۳
۲۴		۷	۳۴/۴۲	۰/۹	۰/۹۷۴	۴۸۹/۲۲	۵۳۶	۰/۰۸۷
۲۵		۸	۲۱۷/۵	۰/۷۹	۰/۹۹۶	۵۲۵	۵۴۱	۰/۰۲۹
۲۶		۹	۷۴/۲۷	۱/۱۴	۰/۹۸۵	۶۰۳/۱۲	۶۶۴	۰/۰۹۲
۲۷		۱۰	۳۶۰۰ *	۱/۴۶	۰/۹۹۹	۴۹۷/۷ **	۵۵۳	۰/۱

* به دلیل محدودیت زمانی اعمال شده در نرم‌افزار **Gams** حداکثر زمان حل برابر ۳۶۰۰ ثانیه می‌باشد که ممکن است در صورت عدم اعمال این محدودیت زمانی، زمان حل نرم‌افزار بسیار بیشتر از ۳۶۰۰ ثانیه(یک ساعت) شود.

** به دلیل محدودیت زمانی اعمال شده و عدم ارائه حل دقیق توسط نرم‌افزار **Gams** یک حد بالای داده شده توسط این نرم‌افزار ارائه گردیده است.

مثال عددی

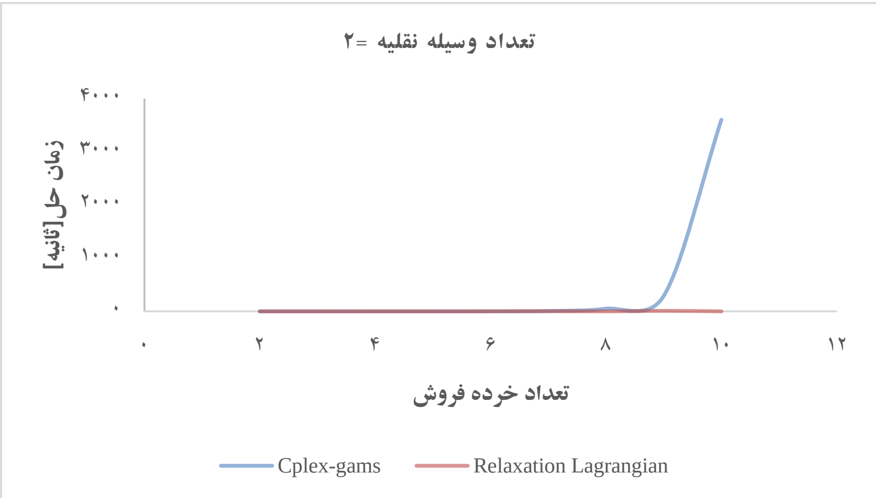
جهت اعتبار سنجی مدل ارائه شده و همچنین جهت بررسی کارایی الگوریتم لاگرانژ ارائه شده، از نمونه مثال‌های عددی متفاوتی استفاده شده است. برای مقایسه‌ی روش حل مدل پیشنهادی و حل مدل با استفاده از الگوریتم آزاد سازی لاگرانژ، از نرخ‌های زمانی و هزینه به صورت زیر استفاده شده است.

$$R_{Obj.Fun} = \left(Obj.Fun_{Cplex} - Obj.Fun_{L.R}\right) / \left(Obj.Fun_{Cplex}\right)$$

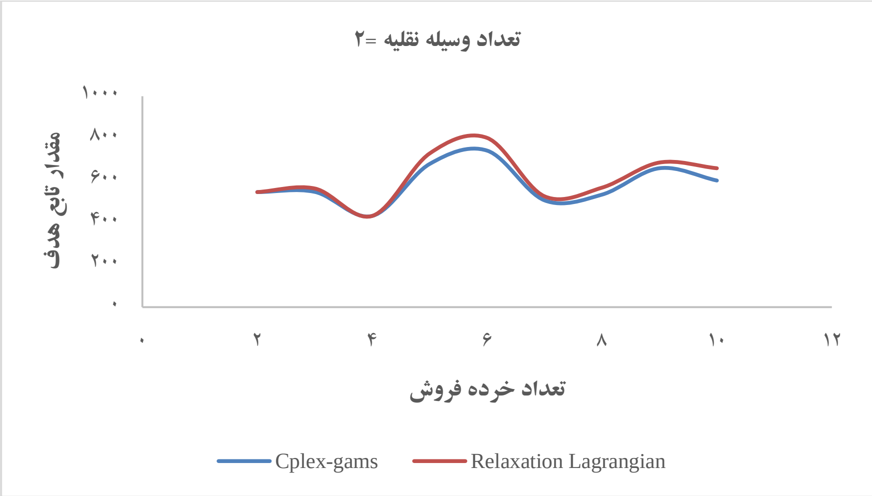
$$R_{Time} = \left(Time_{Cplex} - Time_{L.R}\right) / \left(Time_{Cplex}\right)$$

در جدول (۱) ستون (۶)، نرخ تغییر زمان حل مساله و در ستون (۹)، نرخ تغییر مقدار تـابع هدف مساله نشان داده شده است. با توجه بـه جـدول(۱) و نمودارهـای (۱،۳و۵) مشـخص است که زمان حـل نـرم افـزار GAMS-24-1 خیلـی بیشـتر از زمـان حـل بـا الگـوریتم لاگرانژ می‌باشد، چنانچه تعداد خرده‌فروشان افزایش یابـد، زمـان حـل بـا اسـتفاده از حـل کننده CPLEX خیلی زیاد خواهد شد به نحوی که این حل‌کننده دیگر قادر بـه رسـیدن حل بهینه نخواهد بود و لذا می‌توان از الگوریتم آزاد سازی لاگرانژ برای به دسـت آوردن جواب استفاده کرد. همچنین با توجه به نمودارهای (۲،۴و ۶) ملاحظه مـی‌شـود در زمـانی که تعداد خرده‌فروشان کم باشد، مقـدار تـابع هـدف بـه دسـت آمـده از روش الگـوریتم لاگرانژ بسیار نزدیک به روش حل دقیق نرم‌افـزار GAMS-24-1 مـی‌باشـد، لـذا وقتـی تعداد خرده‌فروشان افزایش یابد می‌توان از الگوریتم آزاد سازی لاگرانژ

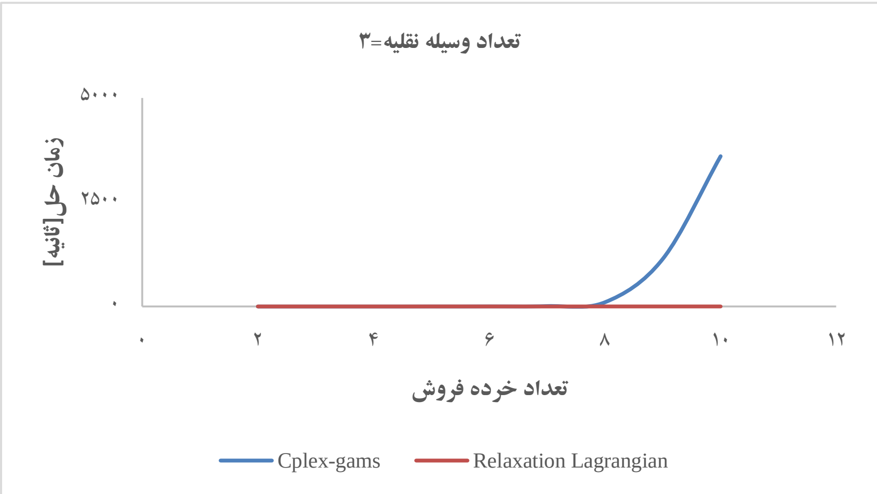
استفاده نمود. لذا با توجه به نتایج به دسـت آمـده الگـوریتم ارائـه شـده از کـارایی بـالایی برخوردار است و می‌توان در سایر مسائل زمان‌بندی تولید و توزیع استفاده نمود.



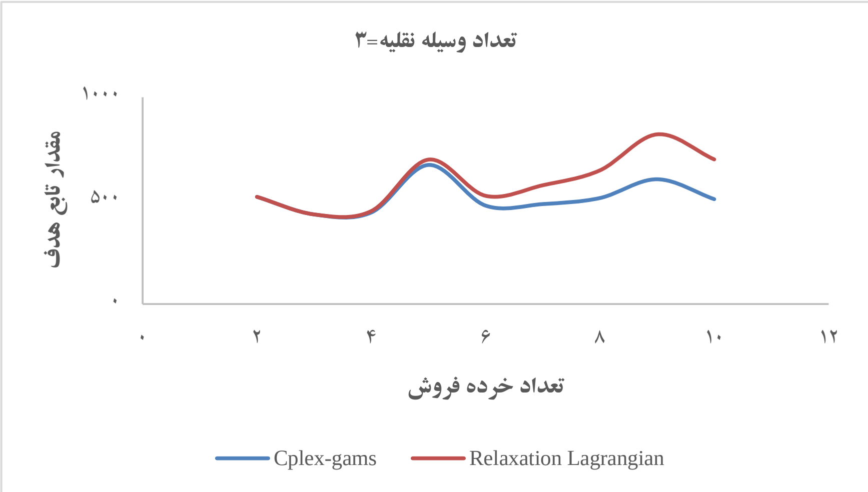
شکل ۱: نمودار مقایسه زمان حل GAMS و Lagrangian Relaxation



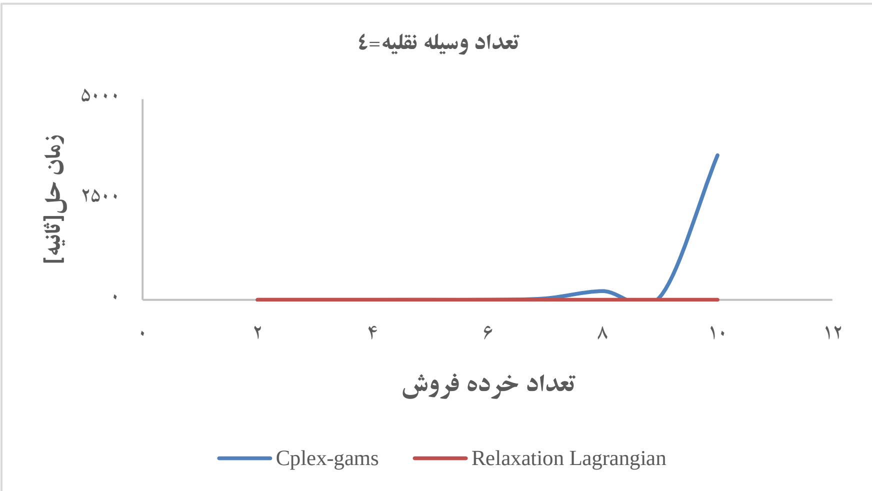
شکل۲: نمودار مقایسه مقدار تابع هدف بهینه GAMS و Lagrangian Relaxation



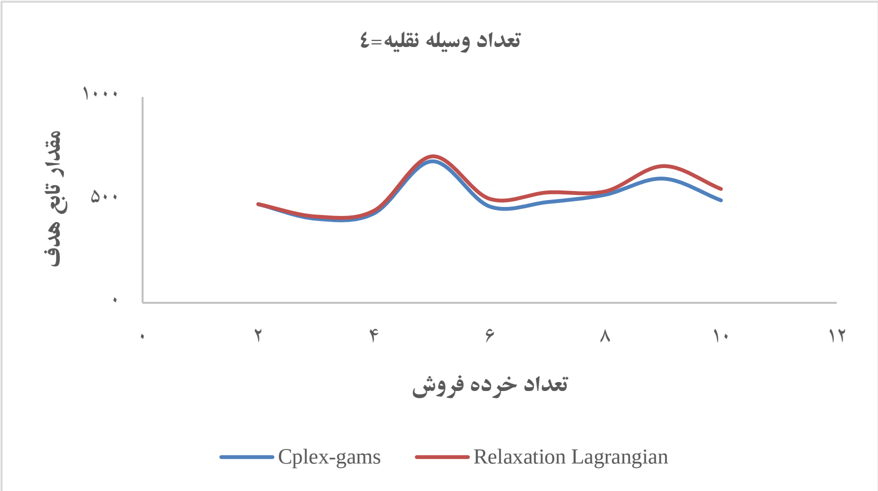
شکل ۳: نمودار مقایسه زمان حل GAMS و Lagrangian Relaxation



شکل ۴: نمودار مقایسه مقدار تابع هدف بهینه GAMS و Lagrangian Relaxation



شکل ۵: نمودار مقایسه زمان حل GAMS و Lagrangian Relaxation



شکل (6): نمودار مقایسه مقدار تابع هدف بهینه GAMS و Lagrangian Relaxation

نتیجه‌گیری

این مقاله مسأله هماهنگی زمان‌بندی تولید و تحویل با کمینه سازی هزینه کل که شامل هزینه مسیریابی وسیله نقلیه و هزینه ثابت مالکیت وسیله نقلیه، هزینه جریمه که ناشی از دیرکرد یا زودکرد موعد تحویل می‌باشد، ارائه می‌دهد. بنابراین برای نشان دادن هماهنگی مسأله زمان‌بندی تولید و تحویل، یک مدل برنامه ریزی خطی عددصحیح مختلط ارائه شده است بطوریکه در آن تمام تقاضای خرده‌فروشان باید برآورده شود. برای حل مدل ریاضی ارائه شده در اندازه‌های کوچک از دو رویکرد حل کننده‌ی CPLEX نرم‌افزار GAMS-24-1 و الگوریتم آزادسازی لاگرانژ استفاده شده است. مشاهده گردید در اندازه‌های کوچک مقادیر بهینه توابع هدف در هر دو روش بسیار نزدیک به هم بوده اما با افزایش تعداد خرده-فروشان زمان حل توسط Gams به صورت نمایی افزایش می‌یابد، لذا در این مسأله برای رفع مشکل زیاد بودن زمان حل در ابعاد بزرگ، از روش آزادسازی لاگرانژ استفاده شده است. لذا می‌توان از الگوریتم ارائه شده در این مقاله، در سایر مسائل زمانبندی تولید و توزیع استفاده نمود. هم‌چنین در تحقیقات آتی می‌توان هزینه راه‌اندازی برای تولید دسته‌های مختلف، هزینه نگهداری موجودی در مرکز توزیع‌کننده در نظر گرفت.

مراجع

Potts, CN. “*Analysis of a heuristic for one machine sequencing with release dates and delivery times*”. Operations Research, Vol. 28, pp. 1436–41, 1980.

Lee, CY., Chen ZL. “*Machine scheduling with transportation considerations*”. Journal of Scheduling, Vol. 4, pp. 3–24, 2001.

Sung, CS., Kim YH. “*Minimizing due date related performance measures on two batch processing machines*”. European Journal of Operational Research, Vol. 147, pp. 644–56, 2003.

Chang, YC., Lee CY. “*Machine scheduling with job delivery coordination*”. European Journal of Operational Research, Vol. 158, pp. 470–87, 2004.

Li, CL., Vairaktarakis, G., Lee, CY. “*Machine scheduling with deliveries to multiple customer locations*”. European Journal of Operational Research, Vol. 164, pp. 39–51, 2005.

Lin, BMT., Cheng, TCE., Chou, ASC. “*Scheduling in an assembly-type production chain with batch transfer*”. Omega, Vol. 35, pp. 143–51, 2007.

Yan, S., Tang, CH. “*Inter-city bus scheduling under variable market share and uncertain market demands*”. Omega, Vol. 37, pp.178–92, 2009.

Day, JM., Wright PD., Schoenherr, T., Venkataramanan M., Gaudette K. “*Improving routing and scheduling decisions at a distributor of industrial gases*”. Omega, Vol. 37, pp. 227–37. 2009.

Qi, X. “*A logistics scheduling model: inventory cost reduction by batching*”. Naval Research Logistics, Vol. 52, pp. 312–20, 2005.

Amstrong, R., Gao, S., Lei, L. “*A zero-inventory production and distribution problem with a fixed customer sequence*”. Annals of Operations Research, Vol. 159, pp. 395–414, 2008.

Naso, D., et al. “*Genetic algorithms for supply-chain scheduling: a case study in the distribution of ready-mixed concrete*”. European Journal of Operational Research. Vol. 177, pp. 2069-2099, 2007.

Chen, Z. L. “*Integrated production and outbound distribution scheduling: review and extensions*”. Operations research, Vol. 58, pp. 130–148, 2010.

Low, C., Li, R.k., Chang, C.M. “*Integrated scheduling of production and delivery with time window*”. International Journal of production Research. Vol. 51, pp. 897-909, 2013.

Fisher, M. L. “*The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems*”. Manage. Vol. 50, pp. 1861–1871, 2004.