

## ارائه یک مدل خطی استوار جهت تشکیل صندوق شاخصی

محمد مهدی بحر العلوم،\*\*\* میرفیض فلاح شمس لیالستانی،\* قاسم بولو\*\*  
تاریخ دریافت (۹۴/۴/۱۲) تاریخ پذیرش (۹۴/۶/۱۴)

### چکیده

در این تحقیق استراتژی تخصیص اثربخش دارایی‌ها در شرایط عدم اطمینان با قابلیت کنترل ریسک، کاهش هزینه‌های معاملات و تحقق بازده هدف‌گذاری شده مورد مطالعه قرار گرفت. به منظور پیاده‌سازی این استراتژی و غلبه بر محدودیت مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی پورتفوی در مواجهه با عدم قطعیت، تشکیل صندوق شاخصی با رویکرد استوار و محدودیت عدد صحیح مد نظر قرار گرفت. در این راستا یک مدل برنامه‌ریزی خطی بصورت کمینه‌سازی قدر مطلق انحراف میان بازدهی مورد انتظار صندوق و شاخص بورس به منظور حل مسئله ردیابی شاخص معرفی گردید. با توجه به ابعاد فضای جواب، از الگوریتم فراابتکاری ژنتیک جهت حل نظیر استوار مسئله بهره گرفته شد. نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌ها بر انتخاب ۲۰ سهم و عملکرد مناسب صندوق‌های تشکیل شده در ردیابی شاخص مبتنی بر معیارهایی چون همبستگی، ریشه دوم میانگین مربعات خطا و بازدهی مازاد با بهره‌گیری از داده‌های تست دلالت دارد.

واژگان کلیدی: صندوق شاخصی، ردیابی شاخص، برنامه‌ریزی خطی، بهینه‌سازی استوار

---

\* دانشجوی دکتری مالی، دانشگاه علامه طباطبایی (نویسنده مسئول) Mahdi\_ba63@yahoo.com

\*\* استادیار، مدیریت مالی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

\*\*\* استادیار، حسابداری، دانشگاه علامه طباطبایی

## مقدمه

بازار سرمایه از زیرساخت‌های مهم نظام‌های اقتصادی کنونی در تجهیز منابع و تخصیص بهینه آن از طریق تامین مالی واحدهای فعال در اقتصاد به شمار می‌رود. این در حالی است که اقتصاد ایران بانک پایه بوده، بطوریکه بانک‌ها وظیفه عمده تامین مالی بنگاه‌های اقتصادی را علی‌رغم عدم تعادل در منابع و مصارف بر عهده دارند. از اینرو طراحی ابزارها و نهادهای مالی نوین تامین مالی و سرمایه‌گذاری به منظور تامین علایق مختلف بازیگران بازار سرمایه و در نتیجه ارتقاء نقش‌آفرینی این بازار در توسعه اقتصادی، بیش از پیش مورد توجه سیاست‌گذاران قرار گرفته است. در این راستا راه‌اندازی صندوق‌های سرمایه‌گذاری به عنوان نمونه‌ای موفق از اقدامات توسعه‌ای توانسته است حجم قابل توجهی از نقدینگی را جذب و با ارائه مزایای متعدد از جمله تنوع‌بخشی به سرمایه‌گذاری‌ها و افزایش نقدشوندگی نقشی موثر را در جهت رشد بازار سرمایه بردارد. این در حالی است که توسعه کمی صندوق‌های سرمایه‌گذاری ضرورت تنوع‌بخشیدن به انواع صندوق‌ها برای جذب سلاقی مختلف را اجتناب‌ناپذیر نموده است. از طرف دیگر تخصیص بهینه منابع تجهیز شده به لحاظ کاهش ریسک، هزینه‌های معاملاتی و تحقق بازدهی مطلوب می‌تواند اطمینان سرمایه‌گذاران را جلب و زمینه‌ساز توسعه پایدار بازار سرمایه و بنگاه‌های اقتصادی فعال در آن گردد. از اینرو در شرایط امروز حاکم بر فضای سرمایه‌گذاری بازار سرمایه ایران با مشخصه عدم قطعیت، بهره‌گیری از استراتژی‌های نوین تخصیص منابع که مشخصه اصلی آن دستیابی به اهداف اشاره شده و کاهش حساسیت به عدم قطعیت در داده‌های ورودی است، اهمیتی دوچندان یافته است. با توجه به مزیت‌های سرمایه‌گذاری غیرفعال و محصولات مبتنی بر شاخص، استراتژی مورد نظر در تخصیص دارایی‌ها در این تحقیق را بر آن متمرکز نموده و و ضمن ارائه یک مدل جهت تشکیل صندوق شاخصی برآنیم تا با بهره‌گیری از بهینه‌سازی استوار کاستی مدل‌های کلاسیک بهینه‌سازی در پاسخگویی به عدم قطعیت را نیز جبران نمائیم. صندوق شاخصی با دستیابی به بازدهی مشابه شاخص، کاهش ریسک سرمایه‌گذاری به سطح سیستماتیک و

نهادینه‌سازی افق سرمایه‌گذاری بلندمدت بجای عکس‌العمل‌های مستمر به تغییر جهت‌های بازار، پایه و اساس پارادایم نوین سرمایه‌گذاری محسوب می‌شود؛ نهادی که در بازار سرمایه ایران کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در ادامه، ابتدا مبانی نظری و پیشینه پژوهش را بیان کرده و سپس به روش تجزیه و تحلیل داده‌ها و نتایج تجربی خواهیم پرداخت. در پایان نیز از مباحث مطرح شده و یافته‌های پژوهش نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی ارائه خواهیم کرد.

### مبانی نظری و پیشینه تحقیق

منطق زیربنایی برای توسعه یک شاخص، پایش عملکرد بخش‌هایی از بازار مالی مانند بازار سهام، مشتقات مالی یا اوراق بهادار با درآمد ثابت است (رافائلی و همکاران، ۲۰۰۶). بطور مثال شاخص کل بورس تهران یک شاخص وزنی از ارزش بازار سهام شرکت‌های پذیرش شده در بورس می‌باشد. سرمایه‌گذاران اغلب به دنبال ردیابی و دستیابی به عملکردی مشابه یک شاخص خاص هستند. دلیل این موضوع پتانسیل نسبتاً بالا برای کسب بازدهی با حداقل ریسک و هزینه‌های معاملاتی و مدیریتی است. از آنجا که دستیابی به عملکردی فراتر از شاخص بصورت مستمر کاری دشوار و شاید غیرممکن برای برخی مدیران صندوق است، ردیابی شاخص بازار از طریق سرمایه‌گذاری در تعداد محدودی از سهام تشکیل دهنده آن یک استراتژی جذاب سرمایه‌گذاری به شمار می‌آید. در این راستا چارلز الیس (۱۹۷۵) در مقاله‌ای با عنوان «بازی بازنده‌ها» نشان داد که ۸۵٪ مدیران فعال نتوانسته‌اند بازدهی بالاتر از شاخص S&P500 را در یک بازه زمانی ۱۰ ساله بدست آورند (شونفلد، ۲۰۰۴). جزئیات بیشتر در خصوص مزایا و معایب ردیابی شاخص در مقاله اندرو و همکاران (۱۹۸۶) قابل بررسی است. در پژوهش‌های مختلف روش‌های گوناگونی برای ردیابی شاخص پیشنهاد شده است: مید و سالکین (۱۹۹۰)، جانسن و فن دیک (۲۰۰۲) از یک تابع هدف کوادراتیک که واریانس میان بازدهی صندوق و شاخص را کمینه می‌نماید، استفاده کردند. برخی دیگر از

پژوهشگران تلاش نمودند تا پیچیدگی مدل ریاضی را از طریق الگوریتم‌های ابتکاری و برآورد جواب‌های خوب و نه لزوماً بهینه مدیریت نمایند. بطور مثال بیزلی و همکاران (۲۰۰۳) از یک الگوریتم ابتکاری تکاملی استفاده نمودند که علاوه بر حل مسأله کمینه‌سازی خطای ردیابی غیرخطی، محدودیت هزینه‌های معاملاتی و تعدیل ترکیب صندوق را نیز دربر می‌گرفت. گیلی و کلزی (۲۰۰۱) از یک الگوریتم ابتکاری پذیرش تا حد آستانه برای کمینه‌سازی خطای ردیابی با در نظر گرفتن محدودیت هزینه‌های معاملاتی استفاده نمودند. کولمن و همکاران (۲۰۰۶) کمینه‌سازی خطای ردیابی کوادراتیک را با محدودیت عدد صحیح و با بهره‌گیری از یک الگوریتم غیر محدب تدریجی مورد مطالعه قرار دادند. این الگوریتم ابتدا جواب بهینه کلی مسأله را بدون لحاظ محدودیت پیدا کرده و سپس بصورت تدریجی به سمت تعداد دارایی‌های الزام شده در مسأله جهت تشکیل صندوق، از طریق یک سری جواب‌های بهینه موضعی متمایل شده و در نتیجه به یک جواب نزدیک به بهینه دست می‌یابد. روش دیگر کمینه‌سازی خطای ردیابی، تعریف تابع هدف بصورت خطی و استفاده از برنامه‌ریزی خطی است. کونو و ویجایانایاک (۲۰۰۱) انحراف مطلق میانگین میان بازدهی صندوق و شاخص را با استفاده از روش شاخه و کران کمینه کرده و یک مدل جایگزین را برای انحراف نامطلوب ارائه کردند. رادلف و همکاران (۱۹۹۹) نیز کمینه‌سازی خطای ردیابی با استفاده از برنامه‌ریزی خطی را در دستور کار قرار داده و چهار معیار خطی متفاوت از خطای ردیابی را مورد مطالعه قرار دادند. رویکرد دیگر متفاوت جهت ردیابی شاخص استفاده از مدل میانگین - واریانس مارکویتز و تعریف واریانس به عنوان خطای ردیابی نسبت به شاخص مبنا است. رول (۱۹۹۲) خطای ردیابی کوادراتیک را با استفاده از چارچوب میانگین - واریانس و اضافه کردن یک محدودیت در خصوص بتای صندوق شاخصی کمینه نمود. روهودر (۱۹۹۸) یک مدل مارکویتز که در تابع هدف خود عبارتی مرتبط با هزینه‌های معاملاتی را در بر می‌گرفت، توسعه داد. یکی از مشکلات اساسی استفاده از چنین مدل‌هایی که از بازدهی مورد انتظار استفاده می‌نمایند، عدم قطعیت بازدهی دارایی‌ها و حساسیت مدل

به آن‌ها است به گونه‌ای که انحراف کوچک در برآورد پارامترهای مدل به‌طور چشمگیری بر اوزان سهام صندوق، بهینه و حتی موجه بودن آن تأثیر می‌گذارد. به منظور غلبه بر این مشکل، چارچوب بهینه‌سازی استوار برای اولین بار توسط سویستر (۱۹۷۳) معرفی شد. وی مدلی پیشنهاد کرد که به ازاء کلیه مقادیر امکان‌پذیر برای پارامترهای غیرقطعی که به مجموعه محدب‌ی تعلق داشت، جواب بهینه و شدنی باقی بماند. بدین ترتیب مدل حاصل بیش از حد محافظه‌کارانه بود چرا که جواب بهینه را به ازاء تحقق بدترین حالت ممکن برای بردار ضرایب غیرقطعی تولید می‌نمود؛ بطوریکه تا حد زیادی از جواب بهینه مسأله اسمی فاصله می‌گرفت. بن‌تال و نیمروفسکی طی سال‌های ۱۹۹۸-۲۰۰۰ و همچنین ال-گوی در بازه زمانی ۱۹۹۸-۱۹۹۹ گام‌های موثرتری در زمینه بهینه‌سازی استوار برداشتند. رویکرد پیشنهادی این پژوهشگران از درجه محافظه‌کاری کمتری برخوردار و شامل حل نظیر استوار بود. در مدل‌های پیشنهادی آن‌ها عدم قطعیت بصورت بیضوی مد نظر قرار گرفت. مشکل روش پیشنهادی آن‌ها تبدیل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم برنامه‌ریزی درجه دوم یا مخروطی بود (قره‌خانی و همکاران، ۱۳۹۲). برای حل این مشکل برتسیماس و سیم (۲۰۰۴) فرمول‌بندی استواری را ارائه نمودند که در آن نظیر استوار یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، فرم خطی خود را حفظ کرده، درجه محافظه‌کاری آن قابل کنترل بوده و در بهینه‌سازی گسسته نیز کاربرد داشت. منطق زیربنایی رویکرد پیشنهادی آن‌ها این بود که در طبیعت هیچ‌گاه بصورت همزمان تمام متغیرهای غیرقطعی مقادیر بدبینانه خود را اختیار نکرده و حداکثر تعداد مشخصی از آن‌ها نسبت به مقدار اسمی خود نوسان خواهد کرد. با بهره‌گیری از این رویکرد پیشنهادی، چن و ون (۲۰۱۲) یک مدل استوار جهت انتخاب صندوق شاخصی ارائه کردند. مدل پیشنهادی آن‌ها یک برنامه عدد صحیح بود که شباهت میان دارایی‌های صندوق و شاخص را مبتنی بر معیار همبستگی بیشینه می‌نمود. اگرچه چارچوب بهینه‌سازی استوار در حوزه‌های مختلف مالی از جمله مدیریت ریسک و سرمایه‌گذاری بکار گرفته شده اما کاربرد آن در ردیابی شاخص مغفول مانده است. چندی از مطالعات انجام شده با حوزه‌هایی نزدیک

به تحقیق حاضر به شرح ذیل معرفی می‌شود: سیفی و همکاران (۱۳۸۳) مدل یکپارچه استوار در مسأله انتخاب سهام تک‌دوره‌ای را توسعه دادند. در این پژوهش بر چگونگی انطباق مدل استوار بر تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار و عدم قطعیت نرخ بازده سهام تأکید شد. مدرس و همکاران (۱۳۸۹) به بهینه‌سازی استوار سبد مالی دارای اختیار معامله پرداختند. در این تحقیق، کارایی مدل استوار با درجه محافظه‌کاری قابل کنترل در مقایسه با مدل استوار بیش محافظه‌کارانه با استفاده از ۱۰۰ نوع سهم و حدود ۴۰۰ اختیار معامله مورد آزمون قرار گرفت. در پژوهش انجام شده توسط گایورونسکی و همکاران (۲۰۰۵) معیارهای مختلف برای خطای ردیابی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

### روش‌شناسی تحقیق

این تحقیق از حیث هدف، جزء تحقیقات کاربردی و از حیث روش در زمره تحقیقات توصیفی محسوب می‌شود. با توجه به هدف این پژوهش مبنی بر کمینه‌سازی خطای ردیابی که تابعی از قدر مطلق اختلاف میان بازدهی مورد انتظار صندوق شاخصی و شاخص مینا است یا به عبارت دیگر دستیابی به حداکثر همبستگی میان این دو بردار بازدهی، می‌توان تحقیق حاضر را در طبقه تحقیقات همبستگی دسته‌بندی نمود. جامعه آماری تحقیق مشتمل بر شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران است و قلمرو زمانی آن بازه بین سال‌های ۱۳۸۹-۱۳۹۲ را در بر می‌گیرد. روش تحلیل داده‌ها متمرکز بر برنامه‌ریزی ریاضی بوده و به منظور تهیه داده‌های ورودی به مدل و حل آن از نرم‌افزار Excel، Tseclient2، MATLAB و Lingo استفاده شده است.

### سوالات تحقیق:

- ۱- آیا استفاده از بهینه‌سازی استوار در تشکیل صندوق شاخصی منجر به بهبود کیفیت ردیابی آن در دوره ارزیابی می‌شود.

۲- آیا افزایش تعداد سهام موجود در صندوق شاخصی منجر به تحقق بازده مشابه شاخص<sup>۱</sup> خواهد شد.

**مسئله اصلی این تحقیق** تخصیص بهینه دارایی‌ها در یک صندوق شاخصی است. به عبارت دیگر در جستجوی مجموعه‌ای مناسب از  $K$  سهم موجود در شاخص کل بورس تهران و وزن بهینه آن‌ها در زمان  $T$  هستیم که بتواند به گونه‌ای اثربخش عملکردی مشابه شاخص را در بازه زمانی  $(T, T + \varepsilon)$  ایجاد نماید (بحرالعلوم و همکاران، ۱۳۸۹).

**مدل‌سازی مسئله:** بدین منظور ابتدا نشان‌گذاری انجام شده را تشریح و سپس به تبیین پیش‌فرض‌های مدل می‌پردازیم:

$R$ : بازده مورد انتظار شاخص کل

$r_i$ : بازده مورد انتظار سهم  $i$ ام از مجموعه سهام در اختیار جهت تشکیل صندوق شاخصی

$k$ : تعداد سهام تشکیل‌دهنده صندوق شاخصی که بر اساس ترجیحات سرمایه‌گذار مشخص می‌گردد. در این تحقیق مقادیر مختلفی برای  $k$  شامل ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰ در نظر گرفته می‌شود.

$z_i$ : متغیری است که در صورت وجود سهم  $i$ ام در صندوق شاخصی معادل ۱ و در غیر اینصورت برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

$w_i$ : وزن سهم  $i$ ام در صندوق شاخصی

پیش‌فرض‌های مدل عبارت است از: ۱- نرمال بودن توزیع بازدهی ۲- عدم امکان فروش استقراری ۳- پراکنش بازدهی از مقدار مورد انتظار حداکثر به میزان یک انحراف از استاندارد ۴- عدم وجود همبستگی میان بازدهی مورد انتظار دارایی‌های صندوق.

جهت حل مسئله تشکیل صندوق شاخصی با در نظر گرفتن محدودیت عدد صحیح، مسئله به صورت ذیل فرموله می‌شود:

$$\text{Min} \left| \sum_{i=1}^n r_i w_i - R \right|$$

۱- خطای ردیابی معیار سنجش تحقق بازده مشابه شاخص است.

Subject to:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = k$$

$$LBz_i < w_i < UBz_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z_i \in \{0, 1\}$$

رابطه (۱) نشان‌دهنده خطای ردیابی و تابع هدف در مسأله مورد نظر است. معادله دوم و چهارم به محدودیت وزن اقلام تشکیل دهنده صندوق و معادله سوم و پنجم به محدودیت عدد صحیح اشاره دارد. بر اساس محدودیت (۳)، اگر در دارایی  $i$  سرمایه‌گذاری شود، مقدار  $Z_i$  برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر می‌شود. پارامتر  $k$  نشانگر تعداد سهامی است که سرمایه‌گذار مایل به سرمایه‌گذاری در آن است، بنابراین این محدودیت، سرمایه‌گذاری در  $k$  سهم از  $n$  سهم را تضمین می‌نماید.

### همتای استوار با درجه محافظه‌کاری قابل تنظیم

به منظور ارائه مدل استوار، عدم قطعیت بازدهی مورد انتظار سهام منتخب و شاخص، به صورت یک بازه تغییرات خطی و حداکثر به میزان یک انحراف از استاندارد در نظر گرفته می‌شود. این بازه تغییرات چنین تعریف می‌شود:

$$U_r = \{\tilde{r}_i \in (E(r_i) - \sigma_{r_i}, E(r_i) + \sigma_{r_i})\}, \quad U_R = \{\tilde{R} \in (E_R - \sigma_R, E_R + \sigma_R)\}$$

مدل همتای استوار به دنبال جواب بهینه‌ای است که با توجه به بازه تغییرات مورد اشاره برای پارامترهای غیرقطعی مدل، بهترین جواب را در بدترین حالت ممکن حاصل نماید. نحوه تبدیل مسأله اسمی به نظیر استوار به شکل زیر است:

$$\text{Min}_w \text{Max}_{\tilde{r}_i \in U_r, \tilde{R} \in U_R} \left| \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i w_i - \tilde{R} \right| \quad (7)$$



برای به دست آوردن مدل پیشنهادی به فرم کلاسیک خطی، یک متغیر کمکی  $y \geq 0$  به عنوان حد بالای انحراف تعریف می‌شود:

$$\left| \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i w_i - \tilde{R} \right| \leq y \quad (8)$$

$$\text{if } \tilde{r}_i w_i \geq \tilde{R}: \left| \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i w_i - \tilde{R} \right| \leq y \approx \sum_{i=1}^n E_{ri} w_i + \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} w_i - E_R + \sigma_R \leq y \quad (9)$$

$$\text{if } \tilde{r}_i w_i < \tilde{R}: \left| \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i w_i - \tilde{R} \right| \leq y \approx \sum_{i=1}^n E_{ri} w_i - \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} w_i - E_R - \sigma_R \geq -y \quad (10)$$

در ادامه J به عنوان مجموعه در برگیرنده ضرائب غیرقطعی (بازدهی مورد انتظار سهام انتخاب شده و شاخص بورس) و S به عنوان زیرمجموعه‌ای از J با اندازه‌ای برابر  $\Gamma$  نشان گذاری می‌شود. به عبارت دیگر  $\Gamma$ ، درجه محافظه کاری و موید حداکثر تعداد متغیرهای غیرقطعی مدل است. با استفاده از رابطه (۹) و (۱۰) و نظر به اینکه حداکثر  $\Gamma$  تا از ضرائب غیرقطعی مقادیری غیر از ارزش اسمی خود را اختیار می‌کنند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \text{Min } y \\ & \sum_{i=1}^n E_{ri} w_i - E_R + \max_{\{S \subseteq J, |S|=\Gamma\}} \left\langle \sum_{i \in S} \sigma_{ri} w_i + \sigma_R \right\rangle \leq y \quad (11) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n E_{ri} w_i - E_R - \max_{\{S \subseteq J, |S|=\Gamma\}} \left\langle \sum_{i \in S} \sigma_{ri} w_i + \sigma_R \right\rangle \geq -y \quad (12)$$

به منظور حل مسأله بیشینه‌سازی داخلی در رابطه (۱۱) و (۱۲) آن را به شکل خطی زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max_{\{S \subseteq J, |S|=\Gamma\}} \left\langle \sum_{i \in S} \sigma_{ri} w_i + \sigma_R \right\rangle & \xrightarrow{\text{yields}} \max \left\langle \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} w_i \alpha_i + \sigma_R \alpha_0 \right\rangle \quad (13) \\ \text{s. t:} & \\ & \sum_{i=1}^n \alpha_i + \alpha_0 \leq \Gamma \\ & \alpha_i, \alpha_0 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

مدل کمینه‌سازی دوگان معادل بیشینه‌سازی فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n v_i + v_0 + \Gamma\lambda \\ & \text{Subject to:} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\lambda + v_i \geq \sigma_{ri} w_i \quad \forall i$$

$$\lambda + v_0 \geq \sigma_R$$

$$v_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$\lambda \geq 0$$

در ادامه مدل کمینه‌سازی ۱۴ با مدل بیشینه‌سازی معادل آن در نامعادله (۱۱) و (۱۲) جایگزین می‌شود. همچنین به منظور اعمال محدودیت عدد صحیح یا به عبارتی اعمال عدم قطعیت روی حداکثر  $\Gamma$  متغیر غیرقطعی انتخاب شده (بازدهی مورد انتظار سهام منتخب و شاخص) محدودیت ذیل اضافه می‌شود:

$$v_i \leq z_i \quad \forall i \quad (15)$$

نهایتاً همتای استوار مسأله تحقیق با درجه محافظه‌کاری قابل کنترل به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \text{Min } y \\ & \text{Subject to:} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n E_{ri} w_i - E_R + \sum_{i=1}^n v_i + \Gamma\lambda + v_0 \leq y$$

$$\sum_{i=1}^n E_{ri} w_i - E_R - \sum_{i=1}^n v_i - \Gamma\lambda - v_0 \geq -y$$

$$\lambda + v_i \geq \sigma_{ri} w_i \quad \forall i$$

$$\lambda + v_0 \geq \sigma_R$$

$$v_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$v_i \leq z_i \quad \forall i$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = k$$

$$LBz_i < w_i < UBz_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z_i \in \{0, 1\}$$

فضای جستجو که متشکل از ترکیبات  $k$  سهمی از  $n$  سهم می‌باشد، یک فضای جستجوی گسترده است که با افزایش مقدار  $n$  و یا با تغییر مقدار پارامتر  $k$  به شدت بزرگ شده و لذا بهره‌گیری از تکنیک‌های فراابتکاری اجتناب ناپذیر خواهد بود. از معادله (۱۶) به عنوان تابع برازش الگوریتم ژنتیک استفاده می‌شود. در ادامه به تبیین مراحل طراحی نظیر ژنتیک مدل ریاضی پرداخته می‌شود.

### تعیین ساختار ژن‌ها و کروموزوم‌ها

در ساختار پیشنهادی این تحقیق، کروموزوم طراحی شده یک رشته  $k$  عضوی از اعداد طبیعی کوچکتر از  $n$  است. هر ژن کروموزوم  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$  نشانگر اندیس دارایی در ترکیب صندوق شاخصی است که بصورت تصادفی از میان  $n$  سهم انتخاب شده است.

### محاسبه برازندگی هر کروموزوم

پس از آنکه تابع ایجاد کننده جمعیت اولیه، مجموعه‌ای از صندوق‌های شاخصی (کروموزوم) را در چارچوب محدودیت‌های مساله و به منظور ایجاد فضای جواب ارائه کرد، الگوریتم ژنتیک به جستجو در این فضای جواب می‌پردازد. در این هنگام برنامه‌ریزی خطی به منظور بهینه‌سازی وزن سهام تشکیل دهنده صندوق و محاسبه برازندگی این عضو از جمعیت فرا خوانده می‌شود.

### اعمال عملگرها

۱- عملگر انتخاب: برای تولید هر نوزاد، والدین از طریق دو مکانیسم انتخاب می‌شوند. یکی چرخ رولت است که در آن احتمال بیشتر به والدین بهتر داده می‌شود که از آن برای

- تقاطع استفاده می‌شود. روش دوم انتخاب یکنواخت است که در آن احتمال انتخاب والدین برای هر یک از اعضاء مجموعه برابر است و از آن جهت عملگر جهش استفاده می‌شود.
- ۲- عملگر تقاطع: عملگر تقاطع مورد استفاده، تقاطع تک نقطه‌ای (یک نقطه برش) است.
- ۳- عملگر جهش: در عملگر جهش، یک دارایی بصورت تصادفی انتخاب می‌شود و یک دارایی دیگر به صورت تصادفی در آن موقعیت قرار می‌گیرد.

### تأمین محدودیت‌ها

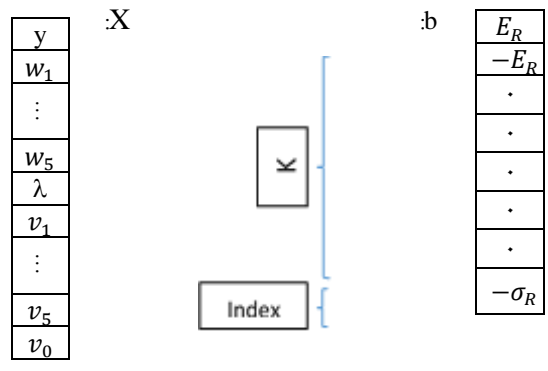
همانطور که اشاره شد، محدودیت عدد صحیح با توجه به تابع ایجادکننده جمعیت اولیه و عملگرهای تقاطع و جهش که به منظور حل مسأله تحقیق طراحی شده‌اند، تأمین می‌شود. برآورده نمودن محدودیت‌های دیگر مدل از طریق طراحی ساختاری متناسب با دستور Linprog در نرم‌افزار MATLAB 7.9 برای متغیرهای ورودی و متغیرهای تصمیم و نهایتاً تعریف محدودیت‌های مسأله در آن تأمین می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min } C^T x & \longrightarrow X = \text{Linprog}(C, a, b, \text{Aeq}, \text{beq}, \text{Ub}, \text{Lb}) \\ \text{s.t: } ax & \leq b \\ \text{Aeq} * x & = \text{beq} \end{aligned}$$

ساختار متناظر با دستور فوق برای مثال فرضی  $k=5$  به شرح ذیل طراحی گردید:

a:

	-۱	$E_{r1}$	$E_{r2}$	$E_{r3}$	$E_{r4}$	$E_{r5}$	$\Gamma$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$
	-۱	$-E_{r1}$	$-E_{r2}$	$-E_{r3}$	$-E_{r4}$	$-E_{r5}$	$\Gamma$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$
K	·	$\sigma_{r1}$	·	·	·	·	-۱	-۱	·	·	·	·	·
	·	·	$\sigma_{r2}$	·	·	·	-۱	·	-۱	·	·	·	·
	·	·	·	$\sigma_{r3}$	·	·	-۱	·	·	-۱	·	·	·
	·	·	·	·	$\sigma_{r4}$	·	-۱	·	·	·	-۱	·	·
	·	·	·	·	·	$\sigma_{r5}$	-۱	·	·	·	·	-۱	·
	·	·	·	·	·	·	-۱	·	·	·	·	·	-۱
Index							$\lambda$			$v_i$		$v_0$	



:C<sup>T</sup>

۱	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	K					$\Gamma$			K			Index

روش نمونه‌گیری و داده‌های مورد استفاده: به منظور دستیابی به داده‌های مورد نظر روش نمونه‌گیری غربال‌گری (فیلترینگ) و مقطع عرضی مورد استفاده قرار گرفت. ارزش بازار بالا، وجود حداقل ۱۰۰ روز معاملاتی در سال، نقدشوندگی مناسب و عاری بودن از پدیده داد و ستد غیر همزمان ۱ و وجود داده‌های کافی و قابل استناد جهت محاسبه بازدهی مورد انتظار،

معیارهای فیلترینگ پیشنهادی در این تحقیق است. در نهایت تعداد سهام انتخاب شده بعد از فیلترینگ به ۲۳۲ سهم رسید. سری زمانی تعدیل شده قیمت سهام انتخاب شده بر حسب افزایش سرمایه و سود نقدی در بازه ۸۹/۱/۷-۹۱/۸/۱۰ جهت محاسبه بازدهی مورد انتظار و انحراف از استاندارد بازدهی مورد استفاده قرار گرفت. بازه زمانی ۱۳۹۱/۸/۱۰-۱۳۹۲/۰۱/۰۵ به عنوان داده‌های خارج از نمونه (تست) و به عبارتی جهت ارزیابی عملکرد صندوق شاخصی در مقایسه با شاخص کل در نظر گرفته شد.

### نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌ها

به منظور سنجش عملکرد مدل استوار پیشنهادی و قابلیت کاربرد الگوریتم ژنتیک طراحی شده در حل مسأله در ابعاد بزرگ (فضای جواب ۲۳۲ سهمی)، ابتدا مسأله در ابعاد کوچک (فضای جواب ۲۰ سهمی) و تحت سناریوهای متفاوت از محدودیت عدد صحیح و درجه محافظه کاری توسط نرم‌افزار Lingo12 حل شد و سپس بهترین جواب‌های حاصل از آن با حل مسأله متناظر توسط الگوریتم ژنتیک با استفاده از آزمون T زوجی مورد مقایسه قرار گرفت. میزان سرمایه‌گذاری اولیه جهت تشکیل صندوق شاخصی ۱۰ میلیون ریال و حد بالا و پایین میزان سرمایه‌گذاری در هر سهم به دلیل حفظ سطح تنوع صندوق در بازه [۰,۰۱-۰,۲] مفروض شد. فضای جواب ۲۰ سهمی از طریق انتخاب سهام با بیشترین ارزش بازار در تاریخ ۹۱/۸/۱۰ تعیین گردید.

جدول (۱): شاخص‌های عملکردی صندوق تحت سناریوهای مختلف از محدودیت عدد صحیح

محدودیت عدد	ضریب	ریشه میانگین مربعات	متوسط بازده اضافی
۵	٪۴۱,۳۷	۰,۰۰۴۱	٪۰,۳۲
۱۰	٪۵۴,۲۱	۰,۰۰۲۰	٪۰,۱۱
۱۵	٪۷۳,۵۷	۰,۰۰۱۲	٪۰,۱۰
۲۰	٪۷۷,۸۸	۰,۰۰۰۸۶	٪۰,۰۲

بر اساس نتایج حاصل از حل مسأله در ابعاد کوچک که در جدول (۱) ارائه شده است، افزایش تعداد سهام تشکیل دهنده صندوق و به تبع آن افزایش شباهت ترکیب آن با شاخص، منجر به بهبود معیارهای عملکردی می‌گردد به گونه‌ای که ضریب همبستگی سری زمانی بازدهی صندوق در مقایسه با شاخص بورس رشدی ۳۶ درصدی و دقت ردیابی (ریشه میانگین مربعات خطا) تا ۱۰ برابر افزایش می‌یابد.

جدول (۲): آزمون T زوجی برای بررسی اعتبار الگوریتم ژنتیک طراحی شده

	میانگین	انحراف معیار	میانگین خطای استاندارد	فاصله اطمینان ۹۵ درصد اختلاف		t	d <sub>f</sub>	Sig.
				حد بالا	حد پایین			
بهترین لینگو	۰,۰۱۵۸۱۶	۰,۰۰۰۰۱۴						
بهترین GA	۰,۰۱۵۸۸۵	۰,۰۰۰۰۱۹						
اختلاف زوجی	-۰,۰۰۰۰۰۱	۰,۰۰۰۰۸۹	۰,۰۰۰۰۰۳	-۰,۰۰۰۰۲۶	-۰,۰۰۰۰۰۷	-۱,۸۳۲	۱۵	۰,۰۶۵

آزمون مقایسه زوج‌های انجام شده آماره t را برابر ۱,۸۳۲- و سطح معنی‌داری را برابر ۰,۰۶۵ نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است سطح معنی‌داری بزرگ‌تر از سطح خطای ۰,۰۲۵ بوده و نتیجتاً فرض صفر رد نمی‌شود. به عبارت دیگر تفاوت معنی‌داری بین دو روش در سطح اطمینان ۹۵٪ وجود ندارد. این موضوع موید آن است که برای حل مدل در ابعاد بزرگتر امکان استفاده از الگوریتم ژنتیک طراحی شده وجود دارد. نظر به رابطه مثبت و مستقیم میان تعداد سهام صندوق و کیفیت ردیابی شاخص، تحلیل خود را بر صندوق‌های ۲۰ سهمی که بهترین عملکرد را داشته‌اند معطوف می‌نماییم. بدین ترتیب الگوریتم ژنتیک طراحی شده در جستجوی بهترین ترکیب ۲۰ تایی از فضای جواب ۲۳۲ سهمی است که علاوه بر کمینه‌سازی قدرمطلق اختلاف میان بازدهی مورد انتظار صندوق و شاخص (خطای ردیابی) به معیارهای عملکردی قابل قبولی در دوره ارزیابی نیز دست یابد. به منظور بررسی اثربخشی رویکرد استوار در فرایند بهینه‌سازی، به تحلیل حساسیت مقدار تابع هدف و همچنین معیارهای عملکردی مورد نظر تحت سناریوهای مختلف از درجه محافظه‌کاری با استفاده از داده‌های خارج از نمونه (تست) می‌پردازیم. درجه محافظه‌کاری تابعی از تعداد متغیرهای غیرقطعی

مدل (بازدهی مورد انتظار سهام و شاخص) است که در صندوق‌های ۲۰ سهمی بین صفر تا ۲۱ متغیر می‌باشد. به عبارت دیگر، درجه محافظه‌کاری برابر صفر نمایانگر قطعی بودن همه متغیرها در مدل یا همان مسأله اسمی است و برابری آن با ۲۱ به معنای اعمال عدم قطعیت کامل در خصوص بازدهی مورد انتظار ۲۰ سهم تشکیل‌دهنده صندوق و بازدهی مورد انتظار شاخص بورس است.

جدول (۳): تحلیل حساسیت تابع هدف نسبت به تغییرات  $\Gamma$  (الگوریتم ژنتیک)

میزان افزایش	مقدار تابع هدف	درجه محافظه‌کاری ( $\Gamma$ )
۰,۰۰	۰,۰۰۰۴۴۹	۰
۰,۰۱۱۳	۰,۰۱۰۸۸۶	۵
۰,۰۰۴۰	۰,۰۱۴۹۲۷	۱۰
۰,۰۰۴۳	۰,۰۱۹۲۱	۱۵
۰,۰۰۱۸	۰,۰۲۰۸۷۶	۲۱

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول (۳)، روند افزایشی تابع هدف یا به عبارتی فاصله گرفتن آن از مقدار بهینه مسأله اسمی با افزایش  $\Gamma$  به راحتی قابل مشاهده است. نکته قابل توجه افزایش کندتر تابع هدف به ازاء  $\Gamma$ ‌های بالاتر است. اگرچه افزایش میزان محافظه‌کاری و کاهش ریسک‌پذیری مدل منجر به انحراف آن از مقدار بهینه مسأله اسمی می‌شود، اما شاخص‌های عملکردی صندوق در دوره تست، مزیت ناشی از اعمال عدم قطعیت در مدل یا به عبارتی اثربخشی بهینه‌سازی استوار را مورد تأکید قرار می‌دهد:

جدول (۴): تحلیل حساسیت شاخص‌های ردیابی نسبت به تغییرات  $\Gamma$  (الگوریتم ژنتیک)

متوسط بازده اضافی	ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)	ضریب همبستگی ( $\rho$ )	درجه محافظه‌کاری ( $\Gamma$ )
-۰,۲۴٪	۰,۰۰۰۹۹	٪۳۸,۲۸	۰
-۰,۰۳٪	۰,۰۰۰۹۱	٪۵۲,۳۰	۵
-۰,۲۰٪	۰,۰۰۰۹۰	٪۵۶,۳۹	۱۰
-۰,۲۱٪	۰,۰۰۰۸۶	٪۶۸,۰۷	۱۵
-۰,۰۹٪	۰,۰۰۱۰۹	٪۳۲,۵۰	۲۱



همانطور که اشاره شد، اعمال عدم قطعیت در مدل منجر به بهبود عملکرد صندوق و ردیابی شاخص توسط آن شده است به گونه‌ای که با افزایش مقدار  $\Gamma$  همبستگی میان بازدهی صندوق و شاخص بورس افزایش و ریشه میانگین مربعات خطا (انحراف بازدهی مورد انتظار صندوق از شاخص) کاهش یافته است. عموماً در نظر نگرفتن عدم قطعیت - به معنای خوش‌بینانه نگاه کردن به مسأله - باعث غیر واقعی شدن یا انحراف بازدهی مورد انتظار صندوق نسبت به مقدار تحقق یافته آن در دوره تست می‌گردد؛ از سوی دیگر نگرش بیش از حد بدبینانه به مسأله نیز باعث از دست دادن فرصت‌های بسیار می‌شود. نتایج حاصل از حل نظیر استوار مسأله تحقیق با درجه محافظه‌کاری قابل تنظیم نیز موید این موضوع است. همانطور که در جدول (۴) مشخص است، نگاه خوشبینانه به مسأله مبنی بر تحقق قطعی بازدهی مورد انتظار شاخص و صندوق منجر به کاهش کیفیت ردیابی در دوره تست شده است بطوری که ضریب همبستگی در محدوده ۳۸ درصد قرار گرفته است. از طرفی نگاه واقع‌گرایانه به مسأله و اعمال عدم قطعیت منجر به بهبود شاخص‌های ردیابی شده است. لحاظ نمودن عدم قطعیت برای ۱۵ متغیر از ۲۱ متغیر غیرقطعی مدل، باعث بهبود کیفیت ردیابی شاخص و افزایش ضریب همبستگی تا حدود ۶۸ درصد شده است. از طرف دیگر دیدگاه بیش از حد بدبینانه مبنی بر اعمال عدم قطعیت در خصوص بازدهی مورد انتظار تمامی سهام منتخب و شاخص، منجر به کاهش کیفیت ردیابی (ضریب همبستگی حدوداً ۳۲ درصد) گردید.

نکته حائز اهمیت در این میان، عملکرد در سطح متوسط صندوق‌های شاخصی حاصل از بکارگیری الگوریتم ژنتیک است. دلیل روشنی برای این موضوع وجود دارد؛ علی‌رغم اینکه اثربخشی الگوریتم ژنتیک در دستیابی به جواب نزدیک به بهینه بصورت آماری در بخش قبلی مورد آزمون و تأیید قرار گرفت، اما کمینه‌سازی تابع هدف با بهره‌گیری از فضای جواب ۲۳۲ سهمی که طبیعتاً متشکل از سهم‌های با ارزش بازار پایین نیز می‌باشد، منجر به انحراف نسبی عملکرد صندوق‌های انتخاب شده نسبت به شاخص در دوره ارزیابی می‌گردد. به عبارت دیگر دستیابی به جواب مسأله بهینه‌سازی، با استفاده از ترکیبی متشکل از سهم‌های با ارزش

بازار غیرهمگن و متفاوت حاصل شده است، از اینرو خطای ردیابی و انحراف نسبت به شاخص در دوره ارزیابی محتمل می‌باشد.

همانطور که می‌دانیم، ارزش بازار یکی از معیارهای رایج در انتخاب سهام اثرگذار بر شاخص در فرایند پیاده‌سازی سرمایه‌گذاری شاخص‌محور است (فلاح شمس و همکاران، ۱۳۹۴). با عنایت به این موضوع به دنبال بهبود و توسعه الگوریتم طراحی شده خواهیم بود به گونه‌ای که ضمن برقراری امکان انتخاب سهام از فضای جواب بزرگ، به صندوق‌هایی با کیفیت ردیابی بهتر نیز دست یابیم. تحلیلی موشکافانه بر خروجی‌های الگوریتم ژنتیک و مشاهده انتخاب شدن تعدادی مشخص از سهام در تمامی صندوق‌های حاصل، این ایده را به ذهن متبادر نمود تا با طراحی یک الگوریتم چند مرحله‌ای به جوابی بهتر و به عبارتی به صندوقی با خطای ردیابی کمتر در دوره تست دست یابیم. بدین منظور تمامی سهامی که حتی یک بار در صندوق‌های حاصل انتخاب شده بودند، مجموعه جدید داده‌ها را تشکیل دادند، به عبارت دیگر فضای جواب جهت اجرای الگوریتم ژنتیک، از ۲۳۲ سهم به ۱۴۷ سهم رسید. در حقیقت با استفاده از این روش، فیلترینگ شرکت‌ها با معیاری جدید و بر اساس خروجی‌های الگوریتم ژنتیک صورت پذیرفت. با توجه به اینکه سهام انتخاب شده توسط الگوریتم ژنتیک، سهامی تأثیرگذار بر شاخص و موثر در ردیابی آن هستند می‌توان انتظار داشت که این معیار فیلترینگ شرکت‌ها نتیجه‌ای بهتر را در خصوص ردیابی شاخص به همراه داشته و همگرایی روش حل را به جهت کاهش پیچیدگی مجموعه داده‌ها افزایش دهد. رویکرد اشاره شده به دلیل اجرای چند مرحله‌ای الگوریتم ژنتیک و بهره‌گیری از خروجی‌های آن به عنوان ورودی جدید، الگوریتم ژنتیک چند مرحله‌ای ۱ نامیده می‌شود. این رویکرد نوعی هوشمند شده الگوریتم ژنتیک طراحی شده است، به گونه‌ای که از خروجی به عنوان بازخورد و ورودی، جهت بهبود جواب نهایی استفاده می‌نماید. از طرف دیگر به منظور بهبود کیفیت صندوق‌های حاصل در ردیابی شاخص با استفاده از داده‌های خارج از نمونه، ۱۴۷ سهم نهایی بر حسب ارزش بازار مرتب شده و سپس یک الگوریتم دقیق بهینه‌سازی در فضای ۲۰ سهم دارای

بیشترین ارزش بازار از فضای ۱۴۷ سهم نهایی و به منظور تخصیص وزن بهینه به هر یک از دارایی‌های صندوق اجرا گردید. نتایج حاصل از پیاده‌سازی رویکرد ترکیبی الگوریتم ژنتیک چندمرحله‌ای و الگوریتم دقیق بهینه‌سازی برای سطوح مختلف از درجه محافظه‌کاری به شرح ذیل ارائه می‌گردد:

جدول (۵): تحلیل حساسیت تابع هدف نسبت به تغییرات  $\Gamma$  (الگوریتم ژنتیک چند مرحله‌ای)

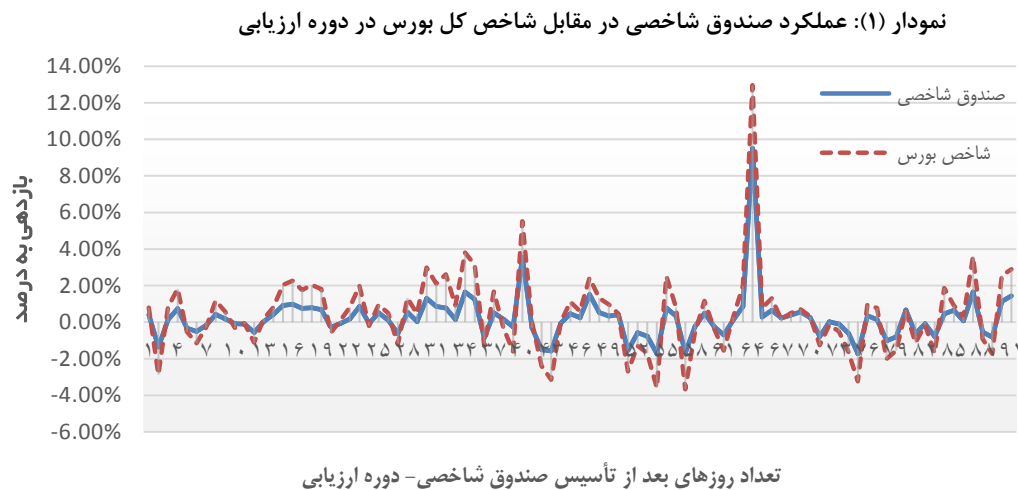
میزان افزایش	مقدار تابع هدف	درجه محافظه‌کاری ( $\Gamma$ )
۰,۰۰	۰,۰۰۰۴۵۹	۰
۰,۰۱۱۱۱	۰,۰۱۰۶۵۵	۵
۰,۰۰۴۲۴	۰,۰۱۴۸۹۴	۱۰
۰,۰۰۴۶۲	۰,۰۱۸۹۱۳	۱۵
۰,۰۰۱۳۴	۰,۰۲۰۸۶۰	۲۱

جدول (۶): تحلیل حساسیت شاخص‌های ردیابی نسبت به تغییرات  $\Gamma$  (الگوریتم ژنتیک چند مرحله‌ای)

متوسط بازده اضافی	ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE)	ضریب همبستگی ( $\rho$ )	درجه محافظه‌کاری ( $\Gamma$ )
٪۰,۳۳	۰,۰۰۴۱۲۲	٪۴۲,۳۲	۰
٪۰,۰۷	۰,۰۰۱۰۴۳	٪۸۱,۳۹	۵
٪۰,۰۷	۰,۰۰۱۰۴۳	٪۸۱,۳۹	۱۰
-٪۰,۰۲	۰,۰۰۰۷۸	٪۸۱,۳۷	۱۶
٪۰,۳۳	۰,۰۰۴۰۵۶	٪۴۴,۱۴	۲۱

تغییر درجه محافظه‌کاری همواره منجر به تغییر در ترکیب صندوق و وزن اقلام تشکیل‌دهنده آن نمی‌گردد از اینرو شاخص‌های سنجش کیفیت ردیابی ممکن است بدون تغییر باقی بمانند. همانطور که در جدول (۶) مشخص است تغییر درجه محافظه‌کاری و اعمال عدم قطعیت بر روی ۵-۱۰ متغیر غیرقطعی مدل، تأثیری بر ترکیب و وزن دارایی‌های صندوق نخواهد داشت. با توجه به شاخص‌های ارائه شده می‌توان صندوق تشکیل شده با اعمال عدم قطعیت بر روی

۱۶ متغیر آن را صندوق شاخصی برتر ارزیابی نمود. به منظور درک بهتر موضوع نمودار بازدهی صندوق برتر در مقابل شاخص بورس به شکل زیر ارائه می‌گردد:



رفتار مشابه شاخص به دلیل همبستگی بالا و از طرفی شدت تغییرات محدودتر در بازار نزولی از ویژگی‌های صندوق شاخصی حاصل شده است. با توجه به ضریب همبستگی بالای ۸۰٪ میان بازدهی صندوق و شاخص، نیازی به بروزرسانی ترکیب صندوق طی این بازه زمانی وجود ندارد.

### نتیجه‌گیری

در این تحقیق تلاش شد تا با معرفی یک مدل برنامه‌ریزی خطی استوار مبتنی بر کمینه‌سازی قدر مطلق انحراف میان بازدهی مورد انتظار صندوق و شاخص، مسأله تشکیل صندوق شاخصی با پارامترهای غیرقطعی مورد بررسی قرار گیرد. این مدل پیشنهادی به دلیل فرمول‌بندی خطی نظیر استوار و کاهش پیچیدگی در نتیجه بکارگیری مفهوم دوگان، با

استفاده از نرم افزارهای استاندارد بهینه سازی قابل حل می باشد. از طرف دیگر برای حل مسأله در ابعاد بزرگ، از الگوریتم ژنتیک چندمرحله ای و رویکرد ترکیبی آن با برنامه ریزی خطی بهره گرفته شد و به منظور بررسی کارایی آن از داده های واقعی بورس تهران و معیارهای ارزیابی کیفیت ردیابی شاخص چون ضریب همبستگی، ریشه میانگین مربع خطا و متوسط بازدهی اضافی استفاده گردید. نتایج حاصل از تحقیق بر وجود رابطه مستقیم میان تعداد سهام تشکیل دهنده صندوق و تحقق بازدهی مشابه شاخص و همچنین دقت ردیابی بالای صندوق های شاخصی تشکیل شده در دوره ارزیابی دلالت دارد. همچنین نتایج، ناظر بر اثربخشی اعمال عدم قطعیت در مدل و بهره گیری از بهینه سازی استوار در کاهش خطای ردیابی در مقایسه با حل مسأله اسمی است که این مهم سازگار با پژوهش انجام شده توسط قره خانی و همکاران (۲۰۱۴) است. در این راستا محاسبات انجام شده نشان داد که صندوق های شاخصی با سطوح محافظه کاری متوسط از عملکرد بهتری برخوردار می باشند. نظر به نتایج حاصل از این پژوهش و محدودیت های آن پیشنهادات ذیل برای پژوهش های آتی ارائه می شود:

با توجه به فقدان ابزارهای پوشش ریسک سیستماتیک در بازار سرمایه ایران، پیشنهاد می گردد تا امکان سنجی طراحی قراردادهای آتی بر روی واحدهای سرمایه گذاری صندوق های شاخصی، مورد مطالعه قرار گیرد.

دستیابی به حداقل خطای ردیابی و یا به عبارتی بهره گیری از یک استراتژی کم ریسک، معیار مناسبی برای سرمایه گذاران غیر متخصص است. بنابراین به آنها پیشنهاد می شود تا یک موضع معاملاتی شاخصی را اتخاذ نمایند. در مقابل، سرمایه گذاران نهادی بایستی این معیار را به عنوان یک پایه مد نظر قرار داده و برای دستیابی به بازده اضافی نسبت به شاخص از طریق تشکیل پورتنفوی هسته- پیرو ۱ برنامه ریزی نمایند.

توسعه مدل از طریق لحاظ نمودن هزینه های معاملاتی و همچنین تعیین دوره بروزرسانی ترکیب صندوق موضوعی جذاب جهت تحقیقات آتی است.

امکان‌سنجی ردیابی شاخص با بهره‌گیری از سایر دارای‌های مالی قابل معامله در بازار از جمله واحدهای صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک به پژوهشگران پیشنهاد می‌گردد.

## منابع

- بحرالعلوم، محمد مهدی؛ تهرانی، رضا؛ حنیفی، فرهاد (۱۳۹۱)، طراحی یک الگوریتم فرا ابتکاری جهت انتخاب پورتفوی بهینه ردیابی‌کننده شاخص بورس تهران، تحقیقات حسابداری، شماره ۱۳، ۲۰-۴۳.
- حنیفی، فرهاد؛ بحرالعلوم، محمد مهدی؛ جوادی، بابک (۱۳۸۸)، طراحی و تحلیل مقایسه‌ای الگوریتم‌های فرا ابتکاری جهت پیاده‌سازی سرمایه‌گذاری شاخص محور در بورس تهران؛ چشم انداز مدیریت، ۳۲، ۸۹-۱۰۸.
- سیفی، عباس؛ حنفی‌زاده، پیام؛ نوابی، حمیدرضا (۱۳۸۳)، مدل یکپارچه استوار در مسئله انتخاب سهام تک‌دوره‌ای؛ تحقیقات مالی، ۱۷، ۷۱-۹۵.
- قره‌خانی، محسن؛ سجادی، سید جعفر؛ صفری، احرام (۱۳۹۲)، بهینه‌سازی استوار سبد مالی با رویکرد *CAPM*، مدیریت تولید و عملیات، دوره چهارم، پیاپی ۶، شماره ۱، ۶۱-۶۸.
- فلاح شمس لیالستانی، میرفیض؛ امیری، مقصود؛ بحرالعلوم، محمد مهدی؛ قره‌خانی، محسن (۱۳۹۴)، ارائه مدلی جهت پیاده‌سازی سرمایه‌گذاری هسته-پیرو در بورس تهران با استفاده از رویکرد ترکیبی الگوریتم‌های دقیق و فراابتکاری، فصل‌نامه دانش سرمایه‌گذاری، مقاله پذیرش شده، چاپ در شماره ۱۵، پائیز ۹۴.
- مدرس یزدی، محمد؛ حسن‌زاده منفرد، مریم (۱۳۸۸)، مدل استوار بهینه‌سازی سبد مالی دارای اختیار معامله، مهندسی صنایع و مدیریت شریف، دوره ۱-۲۷، شماره ۱، ۹۳-۱۰۲.
- Andrews, C., Ford, D. and Mellinson, K. (1986), "The design of index funds and alternative methods of replication", *The Investment Analyst*, Vol. 82, pp. 16-23.
- Beasley, J.E, Meade, N. and Chang, T.J. *An evolutionary heuristic for the index tracking problem*, *European Journal of Operational Research*, Vol. 148, pp. 621-643, 2003.
- Bertsimas, D. and M. Sim, "The price of robustness". *Operations Research*, 2004. p. 35-53.
- Chen Chen, Kwon, Roy H., *Robust portfolio selection for index tracking*, *Computers & Operations Research*, (2012), 39, 829-837.
- Coleman, T., & Y. Li, J. H. (2006). *Minimizing tracking error while*

*restricting the number of assets*. Journal of Risk, 8, 33–56.

Gaivoronski AA, Krylov S, van der Wijst N. *Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking*. European Journal of Operational Research 2005; 163(1):115–31.

Gharakhani, M., F.Z. Fazlelahi and S.J. Sadjadi , (2014). *A robust optimization approach for index tracking problem*, Journal of Computer Science., 10: 2450.2463.

Gilli, M. and K'ellezi, E., *Threshold Accepting for Index Tracking*. Working paper available from the first author at Department of Econometrics, University of Geneva, 1211 Geneva 4, Switzerland, 2001.

Jansen, R. and Dijk, R. van. , *Optimal benchmark tracking with small portfolios*. Journal of Portfolio Management, Vol. 28 , pp. 33–39, 2002.

Konno H, Wijayanayake A. *Minimal cost index tracking under nonlinear transaction costs and minimal transaction unit constraints*. International Journal of Theoretical and Applied Finance 2001; 4(6):939–58.

Meade, N. and Salkin, G. (1990), "*Developing and Maintaining an Equity Index fund*", Journal of the Operational Research Society, 41 (7), 599–607.

Rafaely, B., and Bennell, J. (2006), "*Optimization of FTSE 100 Tracker Funds: A Comparison of Genetic Algorithms and Quadratic Programming*", Managerial Finance, 32 (6), 477-492.

Roll R. *A mean/variance analysis of tracking error*. Journal of Portfolio Management 1992; 18:13–22.

Rohweder Herold C. *Implementing stock selection ideas: does tracking error optimization do any good?*, Journal of Portfolio Management 1998; 24(3): 49–59.

Rudolf Markus, Wolter Hans-Jurgen, Zimmermann Heinz. *A linear model for tracking error minimization*. Journal of Banking & Finance 1999; 23(1): 85–103.

Schoenfeld, A. (2004), "*Active Index Investing*". John Wiley and Sons Inc, Hoboken, N.C.

Soyster, A.L., "*Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming*". Operations research, 1973. 21(5): p. 1154-1157.