

طراحی مدل ریاضی زمانبندی امتحانات در دانشگاه و تحلیل جوابهای حاصل از آن

حسین شمس شمیرانی^۱، مهدی بشیری^۲، محمد مدرس یزدی^۳

تاریخ دریافت: ۹۴/۵/۲۷

تاریخ پذیرش: ۹۵/۶/۲۸

چکیده

در این پژوهش، بهینه سازی زمانبندی امتحانات پایان ترم دروس دانشگاهی، بر اساس یک مسئله واقعی شناسائی شده در یکی از دانشگاههای کشور بررسی شده است. تابع هدفی که برای مسئله تعریف شده است نسبت به آنچه که تاکنون در ادبیات موضوع، مطرح شده، متفاوت است و به نحو موثرتری می تواند هدف واقعی مسئله را بیان نماید. برای تشکیل تابع هدف، مشابه با قانون کولن در الکتروسیته که می گوید میان بارهای همنام، نیروی دافعه وجود دارد نوعی نیروی دافعه میان هر دو امتحان منظور شده است. چنانچه برآیند کلی نیروهای دافعه میان امتحانات، حداقل گردد جواب بهینه مسئله بدست می آید. مدل ریاضی حاصل، برنامه ریزی غیرخطی با متغیرهای صفر و یک است. تابع هدف آن شامل تعداد زیادی عبارت درجه دوم می باشد. جواب بهینه مطلق این مدل، فقط در اندازه های بسیار کوچک قابل شناسائی است. برای حل مدل در اندازه های متوسط و بزرگ، روشهایی را بر مبنای الگوریتم تبرید شبیه سازی شده و نیز الگوریتم رقابت استعماری تنظیم نموده ایم که می توانند در زمان قابل قبولی، جوابهای نسبتاً خوبی را ارائه نمایند. نتایج عملی حاصل از این مدل ریاضی و شیوه های ارائه شده برای حل آن، در یکی از دانشگاههای کشور در طی ترمهای متمادی، استفاده شده و کارائی و موثر بودن خود را به طور عملی نشان داده است.

واژگان کلیدی: زمانبندی امتحانات، بهینه سازی امتحانات، مدل سازی ریاضی، تخصیص درجه دو، تبرید

شبیه سازی شده، الگوریتم رقابت استعماری

^۱ مربی، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان، (نویسنده مسئول)

hsshemirani@gmail.com

^۲ استاد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه شاهد

^۳ استاد، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

دانشجویان تمایل زیادی دارند که فاصله زمانی مناسبی میان امتحانات متوالی آنها وجود داشته باشد. از طرف دیگر نکات و محدودیتهایی وجود دارد که باید در برنامه زمانبندی امتحانات منظور گردد. برای مثال، محدود بودن طول دوره زمانی برگزاری امتحانات (در کشور ایران و نیز بسیاری از کشورهای جهان طول دوره زمانی برگزاری امتحانات پایان ترم ۱۴ روز کاری می‌باشد.)، محدودیت ظرفیت مکانهای برگزاری امتحانات (این محدودیت باعث می‌شود که تعداد امتحانات همزمان، از تعداد مشخصی بیشتر نشود یا آنکه تعداد دانشجویانی که همزمان امتحان می‌دهند از تعداد مشخصی بیشتر نشود.)، با توجه به اینکه تنوع انتخاب دروس برای دانشجویان وجود دارد، تنظیم برنامه زمانبندی امتحانات بطوریکه خواسته‌ها و نکات مورد نظر در آن رعایت شده باشد، نیاز به برنامه ریزی دقیق دارد. در حال حاضر، در بیشتر دانشگاههای کشور، روش متداول در تنظیم برنامه زمانبندی امتحانات دوره‌های کارشناسی، بر اساس جداول ۸ ترمی است که برای دانشجویان هر رشته تنظیم شده است. در این روش، با توجه به جداول ۸ ترمی، سعی می‌شود برنامه امتحانات به گونه‌ای تنظیم شود که زمان برگزاری امتحانات دروس هر نیمسال تحصیلی، با یکدیگر همزمان نباشد و تا حد ممکن نیز، فاصله زمانی مناسبی میان آنها وجود داشته باشد. اما با توجه به نکات زیر، برنامه حاصل از این روش، برای بسیاری از دانشجویان که نمی‌توانند مطابق جداول ۸ ترمی خود، پیش بروند برنامه مناسبی نخواهد بود:

۱. قبول نشدن برخی از دانشجویان در برخی از دروس
 ۲. تنوع انتخاب در اخذ دروس اختیاری توسط دانشجویان
 ۳. اخذ حداکثر ۱۴ واحد درسی توسط دانشجویان مشروط
 ۴. اخذ بیش از ۲۰ واحد توسط دانشجویان ممتاز
 ۵. اخذ کمتر از ۱۲ واحد یا بیشتر از ۲۰ واحد توسط دانشجویان ترم آخر
- مشترک بودن دروس پایه و نیز دروس عمومی در میان تعداد زیادی از رشته‌ها نیز باعث می‌شود تا برنامه امتحانی رشته‌های مختلف، بطور کامل، مستقل از یکدیگر نباشد.

برای کاهش این مشکلات می‌توان برنامه امتحانات را با استفاده از ماتریسی که تعداد دانشجویان مشترک میان هر دو درس را نشان می‌دهد و نیز بکارگیری روشهای بهینه سازی ریاضی، تنظیم نمود. یکی از شیوههای موثر انجام این کار، در این تحقیق معرفی شده است. در ادامه مقاله، مطالب زیر مطرح می‌شود:

در قسمت ۲ پژوهشهای انجام شده توسط سایر محققین مرور شده است. در قسمت ۳ مدل ریاضی جدیدی را که مطابق با یک مسئله واقعی زمانبندی امتحانات می‌باشد شرح داده ایم. در قسمت ۴ فرآیند حل مدل با استفاده از نرم افزارهای تجاری تحقیق در عملیات، بیان شده است. در قسمت ۵ برای شناسایی جواب بهینه مطلق مسئله روش خطی نمودن مدل ریاضی را بیان نموده ایم. در قسمت ۶ نحوه استفاده از دو نمونه الگوریتم فرابتنکاری برای حل مسائلی با اندازههای متوسط و بزرگ، بیان شده است. در قسمت ۷ نتایج حاصل از روشهای مطرح شده را با استفاده از دادههای عددی واقعی و نیز دادههای عددی شبیه سازی شده مورد بررسی قرار داده ایم. در قسمت ۸ نیز جمع بندی و نتیجه گیری موضوع ارائه شده است.

پژوهش‌های انجام شده توسط سایر محققین

با بررسی تحقیقات انجام شده در خصوص بهینه سازی زمانبندی امتحانات، چند صد مقاله یافت می‌شود که با رویکردهای مختلف، موضوع را بررسی کرده اند. در این قسمت، برخی از آنها را مرور می‌کنیم. مقاله کارتر و همکاران (۱۹۹۶)، بعنوان یکی از مقالات پایه برای پژوهشهای بعدی بوده است و تابع هدف و برخی از محدودیتهای معرفی شده در آن، توسط سایر پژوهشگران، عیناً بکار رفته است و بسیاری از محققین دیگر بر روی ارائه روشهای جدید برای آن تلاش نموده اند. در تابع هدف ارائه شده توسط کارتر و همکاران، پارامترهای زیر لحاظ شده است:

۱- تعداد دانشجویان مشترک میان هر دو درس

۲- ضرایب جریمه برای نزدیک بودن زمان برگزاری امتحانات دارای دانشجویان

مشترک

در مقاله کارتر و همکاران (۱۹۹۶) مفروضاتی است که برخی از آنها با شرایط واقعی، به خصوص در دانشگاه‌های ایران فاصله دارد. در مقاله مذکور، همزمان بودن دروسی که دارای ۱ یا ۲ نفر دانشجوی مشترک باشند نیز پذیرفتنی نیست و این موضوع به عنوان یک محدودیت سخت لحاظ شده است. در حالیکه از نظر عملی اگر دروسی باشند که تعداد دانشجویان آنها بالای ۳۰ نفر باشد و تنها ۱ یا ۲ نفر در میان آنها مشترک باشند نباید بخاطر این اشتراک کوچک، برنامه تعداد قابل توجهی از دانشجویان، تحت تاثیر قرار گیرد. به عبارت دیگر همزمانی آنها بلامانع است و در خصوص آن دانشجویان باید تدبیر دیگری اندیشیده شود. برای مثال چنانچه دانشجوی ترم آخر باشند آن دروس را بصورت معرفی به استاد اخذ نمایند در غیر اینصورت باید آن دروس را در زمان ترمیم ثبت نام، حذف نمایند. در واقع همزمان نشدن امتحانات دارای دانشجویان مشترک فقط برای دروسی مطرح است که تعداد اشتراک آنها معنادار و قابل توجه باشد. عدم رعایت این نکته باعث طولانی شدن دوره زمانی برگزاری امتحانات به بیش از ۱۴ روز کاری خواهد شد. آن چنانچه که در مقاله کارتر و بسیاری از مقالات دیگر، این حالت اتفاق افتاده است و از نظر عملی، این موضوع اشکال دارد. جدول شماره ۱ پژوهشهای انجام شده تاکنون را بطور مختصر مرور می‌نماید.

جمع بندی تحقیقات انجام شده، حاکی از این است که در اکثر قریب به اتفاق مقالات منتشر شده، موضوع به صورت تئوریک و بدور از جنبه‌های واقعی مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله در یک دنیای خیالی تعریف شده و برای آن، انواع و اقسام روشهای حل، توسعه داده شده است. در حالیکه تقریباً هیچیک از آنها قابلیت پیاده سازی در عمل را ندارند زیرا مسئله تعریف شده توسط آنان، با ملاحظات واقعی فاصله دارد. بنابراین نیاز است مسئله به شکل واقعیت دیده شود و سپس برای آن، روشهای حل مناسب ارائه گردد. این موضعی است که اساس کار ما را در این پژوهش، شکل داده است.

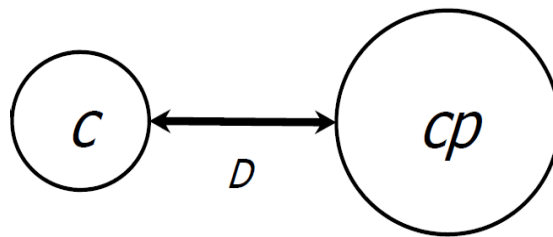
جدول شماره ۱ مرور برخی از پژوهشهای انجام شده تاکنون

ویژگیهای روش				شیوه حل				پژوهشگران	سال	ردیف
هم روز بودن برخی از امتحانات	ثابت بودن تعداد روزهای امتحانات	ظرفیت مکانهای برگزاری امتحانات	عدم تلاقی امتحانات بصورت مطلق	نرم افزار بهینه سازی	فراابتکاری و جستجوی محلی	فرا ابتکاری	ابتکاری			
•		•	•				•	Michael W. Carter, Gilbert Laporte, Sau Yan Lee	۱۹۹۶	۱
		•	•				•	M.N.M. Kahar, G. Kendall	۲۰۱۰	۲
			•		•		•	N. Pillay, W. Banzhaf	۲۰۱۰	۳
			•		•	•	•	E.K. Burke, A.J. Eckersley, B. McCollum, S. Petrovic, R. Qu	۲۰۱۰	۴
			•		•		•	Hamza Turabieh, SalwaniAbdullah	۲۰۱۱	۵
		•	•	•				Alireza Rashidi Komijan, Mehrdad Nouri Koupaei	۲۰۱۲	۶
			•		•	•	•	Salwani Abdullah, Malek Alzaqebah	۲۰۱۳	۷
			•	•				Taha Arbaoui, Jean-Paul Boufflet, Aziz Moukrim	۲۰۱۳	۸
			•				•	Syariza Abdul Rahman, Andrzej Bargiela, Edmund K. Burke	۲۰۱۴	۹
			•			•		Jingpeng Li, Ruibin Bai, Yindong Shen, Rong Qu	۲۰۱۵	۱۰
			•		•	•	•	M. Alzaqebah, S.Abdullah	۲۰۱۵	۱۱
•	•	•		•		•		تحقیق حاضر	-	۱۲

تعریف مسئله

برای شناسائی دقیق مسئله و ارائه تعریفی واضح برای آن، علاوه بر بررسی مسئله‌های تعریف شده توسط سایر محققین، با بررسی موضوع در یکی از دانشگاه‌های کشور، بطور واقعی و از نزدیک، شناسائی مسئله را انجام داده ایم. برای بهبود و توسعه مدل ریاضی مسئله و نیز فرمولبندی مناسبتر، توابع هدف مختلفی را بررسی نمودیم و در نهایت، بصورت تجربی به تابعی رسیدیم که هدف مسئله را به شکل مناسبی بیان می‌نماید و شباهت بسیار زیادی به فرمولی دارد که در مبحث الکتریسیته برای محاسبه مقدار نیروی دافعه میان بارهای الکتریکی همانم بکار می‌رود. این فرمول به نام قانون کولن معروف شده است. قانون کولن بیان می‌کند که ۲ بار الکتریکی همانم به یکدیگر نیروی دافعه وارد می‌کنند و این نیرو نسبت مستقیم دارد با مقدار بار الکتریکی آنها و با مجذور فاصله مکانی آنها از یکدیگر نسبت معکوس دارد. به طور مشابه با این قانون، می‌توان گفت که امتحانات هر ۲ درس که دارای نفرات مشترک با یکدیگر باشند نیروی دافعه به یکدیگر وارد می‌کنند (می‌خواهند از یکدیگر دور باشند) و این نیرو نسبت مستقیم دارد با ضریب امتحانی آنها (واحد درسی آنها) و با مجذور فاصله زمانی میان آنها نسبت معکوس دارد. به عبارت دیگر نیروی دافعه میان درس c و درس cp که تعداد نفرات مشترک آنها برابر با $S(c, cp)$ است و ضریب امتحانی آنها نیز به ترتیب برابر $U(c)$ و $U(cp)$ و فاصله زمانی برگزاری امتحان آن دو درس نیز $D(c, cp)$ باشد برابر خواهد بود با:

$$cp \text{ و } c \text{ میان امتحانات دروس } = S(c, cp) \times \frac{U(c) \times U(cp)}{D(c, cp)^2}$$



شکل ۱ - نیروی دافعه میان امتحانات دروس cp و c

شکل ۱ نشان می‌دهد که همانند قانون کولن در الکتریسته، میان هر دو امتحان که دارای دانشجویان مشترک باشند نیروی دافعه وجود دارد و این امتحانات باید در فاصله ائی از یکدیگر قرار گیرند که نیروی دافعه میان آنها تا حد ممکن خنثی گردد. تعریف ضرایب $U(c)$ و منظور نمودن آنها در تابع هدف، یکی دیگر از نوآوری‌هایی است که در این پژوهش مطرح شده است. تعریف این ضرایب با توجه به بازخوردهای عملی از برنامه ریزی امتحانات بوده است که دانشجویان و اساتید خواستار آن بودند که میان دروسی که حجم مطالب بیشتری دارد فاصله زمانی بیشتری نسبت به دروسی که حجم مطالب کمتری دارند منظور گردد. تجربیات عملی نشان داد که منظور نمودن این ضرایب تاثیر قابل توجهی در بالا بردن کیفیت برنامه زمانبندی امتحانات دارد. به عنوان مثال در تنظیم برنامه امتحانات برای ۶۹ درس در حالتی که ضرایب امتحانی دروس همگی مساوی عدد ۱ منظور شود برنامه ای بدست آمد که در آن ۲ مورد امتحان ۳ واحدی نزدیک یکدیگر بودند و حدود ۱۲۰ نفر از دانشجویان با مشکل مواجه بودند در حالیکه با لحاظ نمودن ضرایب امتحانی برای دروس، این مشکل بر طرف گردید و فشار امتحانات به دروسی که ضریب امتحانی کمتری داشتند منتقل گردید. با توجه به توضیحات فوق، مدل ریاضی مسئله به شرح زیر، قابل بیان است:

مجموعه‌ها

c, cp : مجموعه دروس

d, dp : مجموعه زمانهای قابل استفاده برای برگزاری امتحانات

پارامترها

$U(c)$: ضریب امتحانی درس c

$S(c, cp)$: تعداد دانشجویان مشترک درس c با cp

$D(d, dp)$: فاصله زمانی میان زمانهای d و dp

m : حداکثر تعداد امتحاناتی که با توجه به ظرفیت مکانها، بطور همزمان قابل انجام هستند.

متغیرهای تصمیم

$X(c, d)$: اگر آزمون درس c در زمان d برگزار گردد ۱، در غیر اینصورت برابر ۰ است.

تابع هدف

تابع هدف که باید آنرا حداقل نماییم برابر است با:

$$\min : Z = \sum_c \sum_{cp>c} \sum_d \sum_{dp} S(c, cp) \times \frac{U(c) \times U(cp)}{D(d, dp)^2} \times X(c, d) \times X(cp, dp) \quad (1)$$

محدودیت‌های مدل

چنانچه ضریب امتحانی درسی مخالف صفر باشد باید امتحان آن درس حتماً در یک روز و ساعت خاص برگزار شود. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\sum_d X(c, d) = 1 \quad \forall c / U(c) > 0 \quad (2)$$

با توجه به تعداد مکانهای قابل تخصیص به امتحان و محدودیت تعداد مراقبین، در هر یک از زمانها، از تعداد مشخصی نمیتوان امتحان برگزار نمود. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\sum_c X(c, d) \leq m \quad \forall d \quad (3)$$

مدل فوق از نوع برنامه ریزی غیرخطی آمیخته با متغیرهای عدد صحیح (MINLP) می باشد. تجربیات عملی کار با این مدل نشان داد که حداکثر ۱۳۵ درس را با استفاده از زبان مدلسازی GAMS و نرم افزار حل مدل‌های ریاضی بنام Dicopt می توان با آن به جواب رساند. نرم افزار Dicopt یکی از قویترین نرم افزارهایی است که تاکنون برای حل مدل‌های MINLP بوجود آمده است.

داده‌های مورد نیاز مدل را می توان با دقت بالا بدست آورد. نحوه تعیین و شناسایی داده‌های مدل به شرح زیر می باشد:

۱- پارامتر ضریب امتحانی هر درس که در مدل با نماد **U(c)** نشان داده شده است. این پارامتر بطور پیش فرض برابر با واحد هر درس می باشد. یعنی این ضریب برای دروس ۲ واحدی برابر ۲ و برای دروس ۳ واحدی برابر ۳ می باشد. چنانچه بخواهیم درسی در برنامه امتحانات منظور نگردد (مانند درس تربیت بدنی) ضریب امتحانی

آنها برابر صفر منظور می‌نمائیم و در مدل شرط می‌گذاریم که اگر درسی دارای ضریب امتحانی صفر باشد در مدل ریاضی، منظور نگردد.

۲- ماتریس تعداد دانشجویان مشترک میان دروس مختلف که در مدل با نماد **S(c,cp)** نشان داده شده است. برای بدست آوردن این ماتریس می‌توان به روش زیر عمل کرد:

i. با اخذ گزارش نحوه واحدگیری دانشجویان از سیستم اطلاعاتی آموزش که بر اساس آمار پیش ثبت نام می‌باشد مشخص می‌شود چه دانشجویی در چه دروسی پیش ثبت نام کرده است.

ii. تنظیم ماتریسی که سطرهاى آن دانشجویان و ستونهای آن دروس هستند و در تقاطع آنها چنانچه دانشجویی درسی را برداشته باشد ۱ در غیر اینصورت ۰ منظور شده باشد. این عمل با استفاده از قابلیت جداول محوری در اکسل، به سادگی انجام می‌شود.

iii. محاسبه ترانهاده ماتریس فوق بطوریکه سطرهاى آن بیانگر دروس و ستونهای آن بیانگر دانشجویان باشد.

iv. با ضرب ماتریس درس-دانشجو در ماتریس دانشجو-درس می‌توانیم ماتریس اشتراک ترکیبات دوتائی دروس را بدست آوریم.

ماتریس تعداد دانشجویان مشترک میان دروس، دارای دو ویژگی زیر می‌باشد:

۱- ماتریسی مربعی و متقارن است.

۲- عناصر قطر اصلی این ماتریس از تمامی عناصر هم‌سطر و هم‌ستون خود بزرگتر مساوی است.

۳- ماتریس فاصله زمانی میان زمانهای مختلفی که برای برگزاری امتحانات استفاده می‌شود که در مدل ریاضی با نماد **D(d,dp)** نشان داده شده است. مقادیر این ماتریس بر اساس تفاضل میان **d** و **dp** و مطابق زیر تعیین شده است:

اگر قدر مطلق تفاضل **d** و **dp** برابر صفر باشد آنگاه فاصله آنها ۱ ساعت منظور

گردد.

اگر قدر مطلق تفاضل d و dp برابر یک باشد آنگاه فاصله آنها ۲ ساعت منظور

گردد.

اگر قدر مطلق تفاضل d و dp برابر دو باشد آنگاه فاصله آنها ۶ ساعت منظور گردد.

اگر قدر مطلق تفاضل d و dp برابر سه باشد آنگاه فاصله آنها ۹ ساعت منظور گردد.

اگر قدر مطلق تفاضل d و dp برابر چهار یا بیش از آن باشد آنگاه فاصله آنها را به

حد کافی بزرگ از هم در نظر می‌گیریم و نیازی به محاسبه نیروی دافعه میان آنها

نخواهیم داشت

۴- حداکثر تعداد امتحاناتی که با توجه به ظرفیت مکانها، بطور همزمان قابل انجام

هستند و در مدل با نماد m نشان داده شده است. این پارامتر با توجه به امکانات

دانشگاه و سیاست برگزاری تعداد یکسان امتحانات در هر روز، تعیین می‌شود.

۱. توسعه فرآیند حل

تابع هدف مدل ریاضی حاصل، نه تنها خطی نیست بلکه شامل تعداد بسیار زیادی عبارت

غیرخطی، از نوع درجه دو، است. برای مثال چنانچه قرار باشد برنامه امتحانی ۱۳۵ درس را

طی ۴۵ نوبت زمانی که در هر نوبت ۳ درس بطور همزمان امتحانشان برگزار می‌شود تعیین

نمائیم آنگاه حدود ۷ میلیون جمله غیرخطی در تابع خواهیم داشت که حل آن نیاز به حافظه و

سرعت پردازش بسیار زیاد دارد.

یکی از نوآوریهای تحقیق حاضر این نکته است که تعداد جملات غیرخطی تابع هدف را

بدون آنکه خللی به بهینه بودن جوابها وارد نماید بطور قابل توجهی (حدود ۸۵٪) کاهش داده

ایم. روش انجام این کار بدین شکل بوده است که چنانچه فاصله زمانی میان ۲ امتحان، بیش از

یک روز باشد نیازی به منظور نمودن نیروی دافعه میان آنها در تابع هدف نیست. به عبارت

دیگر، نیازی به بیشتر نمودن فاصله میان آنها وجود ندارد. بنابراین می‌توان جملات مربوط به

آنها را از تابع هدف حذف نمائیم. برای مثال در تنظیم برنامه امتحانی ۱۳۵ درس طی ۴۵ نوبت زمانی که در هر نوبت ۳ درس بطور همزمان امتحانشان برگزار می‌شود تنها ۶ هزار جمله غیرخطی در تابع خواهیم داشت که نسبت به ۷ میلیون بسیار کمتر است. این نکته از نگاه محققین قبلی دور مانده بود و آنها با توجه به تعداد بسیار زیاد جملات غیر خطی در تابع هدف و نیاز به حافظه و توان پردازشی بسیار زیاد کامپیوتر، نتیجه گرفته بودند که حل این مسئله با استفاده از مدل‌های ریاضی، حتی برای حدود ۳۰ درس نیز امکانپذیر نیست. اما توجه به این نکته باعث می‌شود که بتوانیم زمانبندی ۱۳۵ امتحان را نیز با استفاده از مدل ریاضی، در زمان قابل قبولی در حدود ۱۰ دقیقه، بدست آوریم.

نوآوری دیگری که در تحقیق حاضر بکار رفته است این است که برای سرعت بخشیدن و نیز کاهش محاسبات ریاضی مدل MINLP پردازش آنرا به دو مرحله، تقسیم کرده ایم. در مرحله یک با استفاده از یک مدل نسبتاً ساده، یک جواب اولیه را بدست می‌آوریم. سپس در مرحله دو با شروع از این جواب اولیه، حل مدل MINLP را آغاز می‌کنیم.

تجربه نشان داد که این رویکرد در مقایسه با حل مدل MINLP بدون جواب اولیه، بسیار بهتر عمل می‌نماید. مدلی که برای بدست آوردن جواب اولیه بکار گرفته شد فاقد تابع هدف است و فقط شامل مجموعه ای از معادلات و نامعادلات می‌باشد. روابط ریاضی این مدل مطابق زیر است:

۱- تمام دروس که دارای ضریب امتحانی غیر صفر هستند حتماً در برنامه امتحانی لحاظ گردند. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\sum_d X(c,d) = 1 \quad \forall c \quad (4)$$

۲- تعداد امتحانات همزمان نباید از تعداد مشخص شده، بیشتر باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\sum_c X(c,d) \leq m \quad \forall d \quad (5)$$

۳- اگر دو درس دارای نفرات مشترک قابل توجه (برای مثال بیش از ۳ نفر) باشند آنگاه نباید همزمان واقع شوند. بنابراین باید داشته باشیم:

$$X(c,d) + X(cp,d) \leq 1 \quad \forall d, c/c < cp \text{ and } s(c,cp) > 3 \quad (6)$$

جوابهای حاصل از مدل MINLP ممکن است بهینه سراسری نباشد. برای شناسایی جواب بهینه سراسری می توان با استفاده از روش زیر، مدل MINLP مذکور را به یک مدل MIP تبدیل نمود که جواب آن (چنانچه اندازه مسئله در حدی باشد که زمان محاسبات آن قابل قبول باشد) قطعاً بهینه سراسری است.

۲. مدل برنامه ریزی خطی با متغیرهای صفر و یک برای زمانبندی امتحانات

برای اطمینان از شناسایی جواب بهینه سراسری مسئله، با استفاده از تبدیل زیر می توان جملات غیر خطی تابع هدف را به جملات خطی تبدیل نمود. با این تبدیل، غیر خطی بودن از بین می رود اما به تعداد جملات غیر خطی، متغیر تصمیم و نیز محدودیت به مدل اضافه می شود. بجای عبارت $X(c,d) \times X(cp,dp)$ متغیر غیر منفی جدید $Y(c, d, cp, dp)$ را جایگزین می نمایم. با توجه به اینکه متغیر $Y(c, d, cp, dp)$ تنها در صورتی ۱ خواهد شد که متغیرهای $X(c,d)$ و $X(cp,dp)$ برابر ۱ شوند، محدودیتهای زیر را به مدل اضافه می نمایم.

$$X(c,d) + X(cp,d) \leq 1 + Y(c,d,cp,dp) \quad \forall c,d,cp,dp/c < cp \text{ and } D(d,dp) < 4^V \quad (7)$$

با توجه به اینکه ترکیب خطی متغیرهای Y با ضرایب مثبت در تابع هدف وجود دارد و

تابع هدف نیز حداقل می‌شود، چنانچه متغیرهای $X(c,d)$ و $X(cp,dp)$ برابر ۱ شوند آنگاه $Y(c,d,cp,dp)$ برابر ۱ می‌شود و در غیر اینصورت برابر ۰ خواهد شد. در صورتیکه زمان حل مدل مذکور، قابل قبول باشد (که فقط در اندازه‌های بسیار کوچک این حالت وجود دارد) جواب بهینه سراسری بدست می‌آید.

نوآوری دیگری که در این تحقیق بکار رفته است شیوه خطی نمودن حاصلضرب دو متغیر صفر و یک این است. بدین ترتیب که در روش فوق برای خطی نمودن هر حاصلضرب، تنها یک محدودیت به مسئله اضافه می‌شود. در متون کلاسیک و آموزشی تحقیق در عملیات روش انجام این کار، با اضافه کردن دو محدودیت مطابق زیر بیان شده است:

$$X(c,d) + X(cp,d) \leq 1 + Y(c,d,cp,dp) \quad \forall c,d,cp,dp/c < p \text{ and } D(d,dp) < 4 \quad (۸)$$

$$X(c,d) + X(cp,d) \geq 2Y(c,d,cp,dp) \quad \forall c,d,cp,dp/c < p \text{ and } D(d,dp) < 4 \quad (۹)$$

در صورت استفاده از این روش، تعداد محدودیتهایی که به مدل اضافه می‌شود ۲ برابر تعداد جملات غیرخطی خواهد شد و حل آن بسیار دشوارتر و طولانی‌تر خواهد شد.

۳. طراحی الگوریتمهای فراابتکاری برای زمانبندی امتحانات

برای حل مدل ریاضی برای مسائلی که زمانبندی بیش از ۱۳۵ امتحان، مورد نظر باشد می‌توان از الگوریتمهای فراابتکاری استفاده نمود. تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه انجام شده است که در جدول شماره ۱ برخی از آنها مشاهده می‌شود. این روشها ممکن است جواب بهینه سراسری را شناسائی نکنند اما برای رسیدن به جوابهای نسبتاً مناسب، در مسائلی که اندازه آنها بیشتر از آن باشد که توسط مدل‌های MIP یا MINLP حل شوند، قابل استفاده است. در اینجا به عنوان نمونه، کارائی الگوریتم تبرید شبیه سازی شده و الگوریتم رقابت استعماری را بررسی می‌کنیم. سپس نتایج حاصل از آنها را از نظر زمان محاسبات و نیز مقدار تابع هدف با مدل‌های MIP و MINLP مقایسه می‌نمائیم.

الگوریتم تبرید شبیه سازی شده

برای اجرای این الگوریتم، ساختار جواب را رشته ای از مقادیر تصادفی از ۱ تا n در نظر گرفتیم. مقدار n برابر با تعداد دروس مورد نظر است.

۱	۲	۳	۴	۵	\dots	$n-1$	n
					\dots		

شکل ۲- ساختار جواب برای استفاده از الگوریتم تبرید شبیه سازی شده

رویه اجرای این الگوریتم مطابق زیر است:

۱. جواب اولیه S را تولید نمائید.
۲. دمای اولیه $t > 0$ را تعریف نمائید.
۳. گامهای ۴ تا ۸ را L بار تکرار نمائید.
۴. جواب S_j را در همسایگی S با استفاده تصادفی از روشهای زیر بدست آورید:
 - a. Swap (انتخاب تصادفی ۲ درس و جابجا کردن زمان آنها)
 - b. Reversion (انتخاب تصادفی ۲ درس و معکوس نمودن زمان تمام دروس میان آنها)
 - c. Insertion (انتخاب تصادفی ۲ درس و انتقال یکی از آنها به جلوی دیگر)
۵. $\delta = f(S_j) - f(S)$
۶. اگر $\delta < 0$ است آنگاه S_j را جایگزین S نمائید، در غیر اینصورت با احتمال $\exp(-\delta/t)$ این جایگزینی انجام شود.
۷. مقدار دما را با استفاده از ضریب سرد نمودن $r < 1$ و با استفاده از رابطه $t = r \times t$ کاهش دهید.
۸. به گام شماره ۴ بازگردید.
۹. بهترین جواب شناسائی شده را به عنوان جواب حاصل در نظر بگیرید.

برای بهبود عملکرد این الگوریتم برای حل مسئله زمانبندی امتحانات ابتدا ۱۰۰۰ جواب را بطور تصادفی انتخاب می‌نمائیم و با محاسبه مقدار تابع هدف آنها، جوابی را که در میان آنها از همه بهتر باشد به عنوان جواب اولیه مسئله در نظر می‌گیریم. دمای اولیه سیستم را برابر ۱۰۰۰ قرار دادیم و در هر تکرار آنرا با اعمال ضریب ۰.۹۹٪ کاهش دادیم. تجربه کار با این الگوریتم، نشان داد که در زمانهای قابل قبول، جوابهای مناسبی را بدست می‌آورد.

۵-۲- الگوریتم رقابت استعماری

برای اجرای این الگوریتم، ساختار جواب را مشابه با الگوریتم تبرید شبیه سازی شده در نظر می‌گیریم.

رویه اجرای این الگوریتم مطابق زیر است:

۱. ایجاد جوابهای اولیه
۲. انتخاب بهترین جوابها به عنوان امپراتوری
۳. تخصیص سایر جوابها به عنوان کلونی به امپراطوریها
۴. نزدیک نمودن هر یک از کلونیها به امپراطوری خود (Assimilation)
۵. بررسی بوجود آمدن تغییرات در هر یک از امپراتوریها و کلونیها (Revolution)
۶. مقایسه مقدار تابع هدف هر یک از کلونیها با امپراتوری خود و جابجا نمودن آنها در صورتیکه مقدار تابع هدف کلونی از امپراطوری بهتر باشد.
۷. محاسبه شاخص هر امپراطوری
۸. جدا نمودن ضعیفترین کلونی از ضعیفترین امپراطوری، و ملحق نمودن آن به یک امپراتوری دیگر
۹. هرگاه تعداد کلونیهای ضعیفترین امپراطوری به ۰ برسد آنگاه خودش به عنوان یک کلونی به امپراتوری دیگری، ملحق شود.
۱۰. اگر شرایط پایان الگوریتم بوجود آمده است بهترین جواب یافت شده، گزارش شود. در غیر اینصورت به به گام ۴ رجوع شود.

برای اجرای این الگوریتم، ابتدا ۵۰ جواب را بطور تصادفی انتخاب می‌نمائیم و با محاسبه مقدار تابع هدف آنها، ۱۰ جوابی را که در میان آنها از همه بهتر باشد به عنوان امپراطوری در نظر می‌گیریم. احتمال بوجود آمدن انقلاب در هر یک از کشورها را برابر ۴۰٪ منظور می‌نمائیم. برای محاسبه شاخص هر امپراطوری، مقدار تابع هدف آنرا با ۱۰٪ میانگین تابع هدف کلونیهای آن جمع می‌کنیم. همچنین گامهای ۴ تا ۱۰ الگوریتم را به تعداد ۱۰۰۰ بار تکرار می‌نمائیم. مقادیر این پارامترها با استفاده از سعی و خطا تنظیم گردید و تجربه کار با این الگوریتم، نشان داد که در زمانهای قابل قبول، جوابهای مناسبی را بدست می‌آورد.

۴. بررسی مثالهای عددی

بمنظور بررسی عملکرد مدل پیشنهادی و همچنین الگوریتمهای حل، مثالهای متنوعی در این قسمت حل شده و نتایج آنها مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند. مثال سوم مربوط به داده‌های واقعی یکی از دانشگاههای کشور است و سایر مثالها با استفاده از دادههای شبیه سازی شده، تولید شده اند. برای انجام محاسبات از کامپیوتری با مشخصات زیر استفاده شده است:

Intel® Core i3-3217U CPU@ 1.8 GHz
RAM 4.00 GB

روش‌های بکار رفته برای حل مسئله عبارتند از:

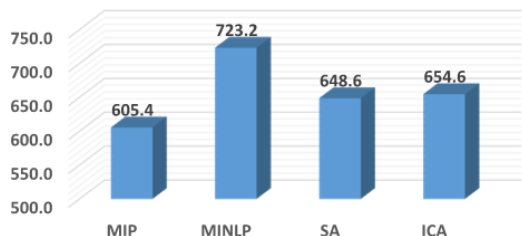
- ۱) برنامه ریزی خطی آمیخته با اعداد صحیح (MIP) و حل آن با استفاده از Cplex
- ۲) برنامه ریزی غیرخطی آمیخته با اعداد صحیح (MINLP) و حل آن با استفاده از Dicopt
- ۳) الگوریتم تبرید شبیه سازی شده (SA) و اجرای آن با استفاده از کد نویسی در Matlab
- ۴) الگوریتم رقابت استعماری (ICA) و اجرای آن با استفاده از کدنویسی در Matlab

جدول ۲- مقایسه مقدار تابع هدف و زمان محاسبات روشهای پیشنهاد شده

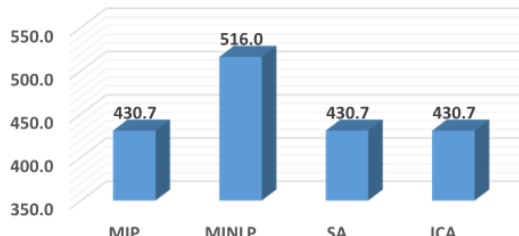
ICA ^f		SA ^g		MINLP ^h		MIP ⁱ		تعداد امتحانات همزمان	تعداد زمانها	تعداد درسها
مقدار تابع هدف	زمان حل (ثانیه)	مقدار تابع هدف	زمان حل (ثانیه)	مقدار تابع هدف	زمان حل (ثانیه)	مقدار تابع هدف	زمان حل (ثانیه)			
۴۳۱	۳۰	۴۳۱	۳۹	۵۱۶	۰/۰۲	۴۳۱	۱۲	۳	۴	۱۲
۶۵۵	۳۳	۶۴۹	۴۴	۷۲۳	۰/۰۴	۶۰۵	۱۲۱۷	۳	۶	۱۸
۶۵۹	۷۰	۵۴۱	۹۴	۶۴۲	۴/۸	—	—	۳	۲۳	۶۹
۱۴۶۶	۲۵۵	۱۱۰۲	۳۴۲	۱۱۳۷	۲۱/۹	—	—	۳	۴۰	۱۲۰
۱۴۱۵	۳۱۲	۱۰۲۹	۴۱۰	۱۱۳۲	۲۵/۸	—	—	۳	۴۵	۱۳۵
۱۹۸۰	۶۵۱	۱۲۹۱	۹۱۴	—	—	—	—	۳	۷۲	۲۱۶

(۱) حل کننده Cplex (۲) حل کننده Dicopt (۳) کد نویسی در نرم افزار Matlab
 مدل MIP برای حل مسئله ای که شامل ۲۰ درس یا بیشتر از آن باشد به دلیل زیاد بودن تعداد محدودیت‌ها، با استفاده از نرم افزار Cplex قابل حل نیست. مدل MINLP برای حل مسئله ای که شامل ۱۳۵ امتحان یا بیشتر از آن باشد به دلیل زیاد بودن تعداد جملات غیرخطی تابع هدف، با استفاده از نرم افزار Dicopt قابل حل نیست. بررسی مثالهای عددی، حاکی از مناسب بودن نتایج روشهای ارائه شده دارد. به خصوص در اندازه‌های بزرگ، کارائی روش تبرید شبیه سازی قابل مشاهده می‌باشد.

حداقل تابع هدف حاصل برای زمانبندی ۱۸ امتحان



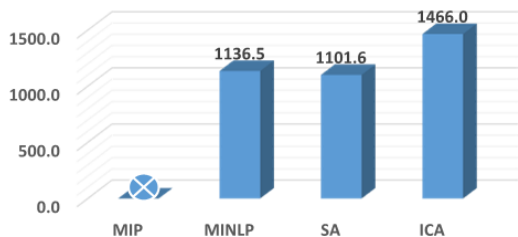
حداقل تابع هدف حاصل برای زمانبندی ۱۲ امتحان



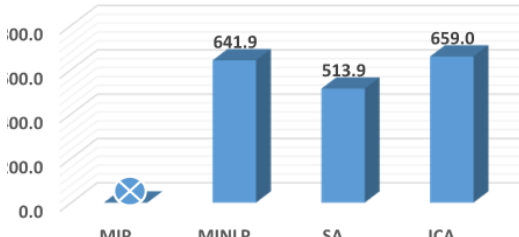
شکل ۳- مقایسه تابع هدف روشهای مذکور برای ۱۸ امتحان

شکل ۲- مقایسه تابع هدف روشهای مذکور برای ۱۲ امتحان

حداقل تابع هدف حاصل برای زمانبندی ۱۲۰ امتحان



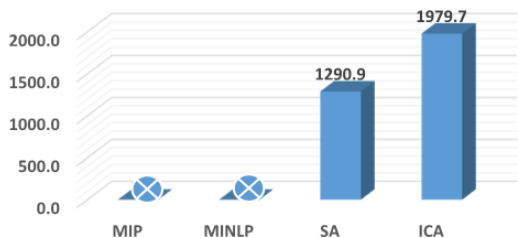
حداقل تابع هدف حاصل برای زمانبندی ۶۹ امتحان



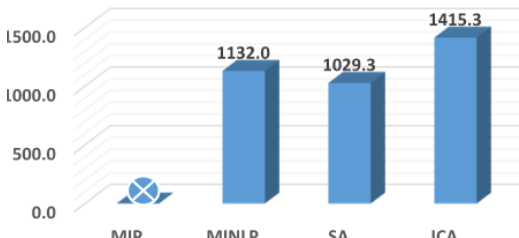
شکل ۵- مقایسه تابع هدف روشهای مذکور برای ۱۲۰ امتحان

شکل ۴- مقایسه تابع هدف روشهای مذکور برای ۶۹ امتحان

حداقل تابع هدف حاصل برای زمانبندی ۲۱۶ امتحان



حداقل تابع هدف حاصل برای زمانبندی ۱۳۵ امتحان



شکل ۷- مقایسه تابع هدف روشهای مذکور برای ۲۱۶ امتحان

شکل ۶- مقایسه تابع هدف روشهای مذکور برای ۱۳۵ امتحان

یکی دیگر از نوآوریهای بکار رفته در این تحقیق، طراحی کاربرگی در محیط Excel است که به منظور بررسی و تحلیل جوابهای حاصل، گزارشی گرافیکی و مدیریتی از روی جوابهای ارائه می کند. در این کاربرگ با استفاده از زبان برنامه نویسی ویژوال بیسیک، جوابهای حاصل از مدل حل ریاضی توسط GAMS خوانده می شود و با استفاده از بانک اطلاعات مربوط به دروس که در صفحات دیگر آن قرار دارد گزارش تحلیلی بسیار مفیدی را ارائه می کند. در این گزارش علاوه بر کد درس، نام درس، نام استاد، تعداد دانشجویان، و نیز تعداد دانشجویان مشترک میان دروس همزمان، دروس صبح و عصر، دروس امروز صبح و فردا صبح، دروس امروز عصر و فردا عصر، دروس امروز عصر و فردا صبح، و دروس امروز عصر و فردا عصر را نشان می دهد. در انتها نیز تعداد کل موارد مذکور را محاسبه و درج می نماید. با استفاده از این کاربرگ می توان تحلیلهای چه شود_ اگر (What if) را نیز انجام داد. بدین ترتیب که می توانیم بررسی نمائیم که تغییر زمان یک امتحان چه تاثیری بر روی دانشجویان خواهد گذاشت، یا آنکه جابجا نمودن زمان ۲ امتحان با یکدیگر چه تاثیری بر روی دانشجویان خواهد گذاشت و غیره. استفاده از این کاربرگ برای بررسی میزان مطلوبیت جوابهای حاصل و تحلیلهای دیگر، بسیار مفید است. بطوریکه بدون آن، کارائی مدل های ریاضی واضح نخواهد شد و پیاده سازی جوابهای حاصل از آنها با دشواری همراه خواهد شد. الگوی این گزارش، مطابق شکل ۸ می باشد.

روز	تاریخ	صبح	عصر	روز	نوبت	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	جمع	
دوشنبه	92/03/19	C21963 50	C25093 36	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	
d01		C22034 72	C28286 43	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
		C28851 46	C 0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	
		C21513 18	C21281 55	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	42	
سه شنبه	92/03/20	C27232 12	C21524 27	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
d02		C 0	C21942 45	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		C21400 34	C21481 35	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		C25091 45	C27233 31	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
چهارشنبه	92/03/21	C28418 65	C 0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
d03		C25091 45	C27233 31	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		C21742 10	C25094 52	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		C22021 9	C28810 38	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
پنجشنبه	92/03/22	C28247 31	C37123 45	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
d04		C22021 9	C28810 38	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		C21742 10	C25094 52	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		C28247 31	C37123 45	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
					تعداد	2	48	199	306									

شکل ۸ - الگوی طراحی شده برای بررسی میزان مطلوبیت جوابهای حاصل

نتیجه گیری

با توجه به جدول مقایسه روشهای ارائه شده، می توان نتیجه گرفت که:

۱- مدل MIP که جواب بهینه دقیق را ارائه می کند فقط در اندازه بسیار کوچک و در

حدود ۱۸ درس قابل استفاده است که در این حالت زمان محاسبات در حدود ۲۰

دقیقه خواهد بود.

۲- مدل MINLP ممکن است جواب بهینه مطلق را ارائه نکند و به یک جواب بهینه محلی منجر شود. اما زمان محاسبات آن در مقایسه با MIP بسیار کوتاهتر می‌باشد و با توجه به روشی که توسط نویسندگان تحقیق حاضر، برای کاهش تعداد جملات تابع هدف آن ارائه گردید، زمانبندی مسائلی با ۱۳۵ درس نیز با آن امکانپذیر است. همچنین کیفیت جوابهای حاصل از آن، هر چند ممکن است بهینه محلی باشد اما از نظر عملی قابل قبول و قابل استفاده است.

۳- روش SA در مقایسه با سایر روشها، جوابهای بسیار خوبی را ارائه می‌کند و زمان محاسبات آن نیز از نظر عملی قابل قبول است.

۴- روش ICA جوابهای خوبی را ارائه می‌کند و زمان محاسبات آن نیز از نظر عملی قابل قبول است. اما جوابهای حاصل از آن، در مقایسه با جوابهای SA از مطلوبیت ضعیفتری برخوردار است.

نوع آوریهایی که در تحقیق حاضر بکار رفته است بطور خلاصه عبارتند از:

۱- ایده استفاده از قانون کولن در الکتریسیته برای طراحی تابع هدف دقیقتر و کاملتر نسبت به پژوهشهای پیشین

۲- کاهش بسیار زیاد تعداد عبارتهای غیر خطی تابع هدف با حذف عبارتهای مربوط به امتحاناتی که فاصله آنها از یک فاصله زمانی مشخص (برای مثال یک روز) بیشتر باشد.

۳- لحاظ نمودن ضریب وزنی برای هر یک از امتحانات با توجه به حجم مطالب و سنگین بودن محتوای آنها (مقدار پیش فرض آن همان واحد درس می‌باشد) و مشابه مقدار بار الکتریکی یک شی است.

۴- خطی نمودن عبارت غیرخطی حاصلضرب دو متغیر صفر و یک، تنها با اضافه نمودن یک محدودیت

۵- شناسایی یک جواب اولیه نسبتاً مناسب با حل یک مدل ریاضی ساده تر و استفاده از آن برای حل مدل ریاضی اصلی

۶- طراحی گزارش ارزیابی میزان مطلوبیت جوابهای حاصل و استفاده از آن برای

بررسی سناریوهای مختلف و نیز تحلیلهای چه شود_اگر

برای توسعه‌های آتی در این زمینه می‌توان ایجاد و توسعه روشهای دقیقی که بتوانند جوابهای

بهینه را برای مسائلی در اندازه‌های چند صد امتحان و حتی چند هزار امتحان در زمان قابل

قبول ارائه نمایند مورد توجه قرار داد.

منابع

- Ahandani, M., Baghmisheh, M., & BadamchiZadeh, M. (2012). Hybrid particle swarm optimization transplanted into a hyper-heuristic structure for solving examination timetabling problem. *Swarm and Evolutionary Computation*, 7, 21–34.
- Alzaqebah M., & Abdullah, S. (2015). Hybrid bee colony optimization for examination timetabling problems. *Computers & Operations Research*, 54, 142–154.
- Arbaoui, T., Boufflet, J., & Moukrim, A. (2013). An Analysis Framework for Examination Timetabling. *Symposium on Combinatorial Search*.
- Burke, E., Eckersley, A., McCollum, B., Petrovic, S., & Qu, R. (2010). Hybrid variable neighbourhood approaches to university exam timetabling. *European Journal of Operational Research*, 206, 46–53.
- Carter, M., Laporte, G., & Lee, S. (1996). Examination Timetabling: Algorithmic Strategies and Applications. *Journal of the Operational Research Society*, 47, 373-383.
- Dersan C., Robert B., & Yu D. (2010). *Applied Integer Programming, Modeling and Solution*. John Wiley & Sons, Inc, 64_65.
- Ei, S., & Nang, S. (2012). Hyper heuristic based on great deluge and its variants for exam timetabling problem. *Journal of Artificial Intelligence & Applications*, 1, 149–162.
- Jingpeng, L., Ruibin, B., Yindong, S., & Rong, Q. (2015). Search with evolutionary ruin and stochastic rebuild: A theoretic framework and a case study on exam timetabling. *European Journal of Operational Research*, 242, 798–806.
- Kahar, M., & Kendall, G. (2010). The examination timetabling problem at University Malaysia Pahang: Comparison of a constructive heuristic with an existing software solution. *European Journal of Operational Research*, 207, 557–565.

Komijan, A., & Koupaei, M., (2012). A new binary model for university examination timetabling: a case study. *Journal of Industrial Engineering International*, 8:28.

Masri, A., Hamdan, A., Salwani, A., Othman, Z., & Zakree, M. (2011). Intelligent Examination Timetabling Software. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 18, 600–608.

Obaid, O., MohdSharifuddin, A., Salama, A., & Mazin, A. (2012). Comparing Performance of Genetic Algorithm with Varying Crossover in Solving Examination Timetabling Problem. *Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences*. 10, 1427–1434.

Pillay, N., & Banzhaf, W., (2010). An informed genetic algorithm for the examination timetabling problem. *Applied Soft Computing*, 10, 457–467.

Salwani, A., & Malek, A. (2013). A hybrid self-adaptive bees algorithm for examination timetabling problems. *Applied Soft Computing*, 13, 3608–3620.

Syariza, A., Andrzej, B., & Edmund, K. (2014). Adaptive linear combination of heuristic orderings in constructing examination timetables. *European Journal of Operational Research*, 232, 287–297.

Turabieh, H., & Abdullah, S. (2011). An integrated hybrid approach to the examination timetabling problem. *Omega*, 39, 598-607.