

Marginal productivity in two – stage network processes in the presence of undesirable outputs

Maryam Sharifi

PhD student, Department of Applied Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran

Sohrab Kordrostami *

Professor, Department of Applied Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Lahijan Branch, Islamic Azad University, Lahijan, Iran

Leila Khoshandam

Assistant Professor, Department of Applied Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran

Abstract

In production technology, studying the effect of an indicator on one or more other indicators while maintaining efficiency, named marginal rate, can provide valuable information to managers for better management of the system. In this paper, the aim is to study the effect of meaningful indicators on each other and in a specific two-stage structure with undesirable outputs. In this study, production technology is divided into two sub-technologies in a two-stage structure and then, focusing on the application issue, first the effect of a specific input from the first stage on the intermediate indicator is measured and then by calculating the changes made in this indicator, its effect on the specific final output is measured as a transmission factor. In this paper, focusing on data collected from 21 provincial power plants consisting of interdependent "generation" and "transmission" sections, each unit has a similar structure to the stated structure. Considering the total technology distribution, the effect of increasing or decreasing the fuel type component is

* Corresponding Author: sohrabkordrostami@gmail.com
How to Cite: xxxxxxxx

taken as the first stage input on the electricity flow, and then the changes in electricity flow are measured on the total system revenue.

Introduction

In today's world, one of the appropriate tools for measuring and evaluating productivity is data envelopment analysis (DEA). In classical DEA models, the main objective of the increase in output per unit cost is to increase the output, but in some processes with undesirable outputs, other outputs are produced as undesirable outputs. In DEA, different views have been expressed in addressing these outputs. The weak disposability of Kuosmanen (2005), one of the most common ways, is used in this study. In the traditional DEA approach, decision making units were considered as black boxes. However, in the real world, we are faced with the manufacturing processes that have two or more stages to produce final products with network structures. Therefore, network data envelopment analysis (NDEA) is introduced. The network models not only provide overall efficiency for the production processes but also provide the efficiency score for each individual stage. In production theory, calculating the effect of an index on another index can provide valuable information so that manager can access the desired performance by maintaining the efficiency and the exchange between the inputs and outputs. DEA to inherent complexity in most of the manufacturing processes, a decision parameter cannot be changed without affecting one or more parameters. Exchanges between inputs and outputs are known as marginal rates and marginal productivity in economics and partial derivatives in mathematics. Although in DEA models, the ratio of optimal coefficients provides this information, but due to the nature of the linear segmentation of the border and also due to the multiplicity of these coefficients, the marginal rates will not be unique. The researchers provided solutions in this field, which are discussed in the following sections. In general, by knowing these rates, valuable suggestions can be made to the managers in order to improve the overall performance of the system. As far as we know, very little research has been done in the field of studying marginal rates and marginal productivity in two-stage production networks with the presence of unfavorable factors. Therefore, this topic is still seen as a research gap in the DEA literature. Therefore, in this

paper, a four-stage process is presented to obtain marginal productivity in a two-stage system in the presence of unfavorable factors. For this purpose, efficiency measurement model has been proposed to evaluate the efficiency score of two-stage systems in the presence of undesirable outputs. Then, with the idea of Asmild's method, which was used in 2006 for calculated the right and left marginal rates; the marginal productivity was calculated in the proposed network.

Methodology

To show the practical nature of the proposed method, the model and process were analyzed on the collected data related to 21 provincial power plants of the country. The electricity generation process in each power plant is a two-stage process, which includes the production and transmission sectors, respectively. The flow of electricity was used as an intermediate product in the production sector with an output nature and in the transmission sector with an input nature. Personnel costs, and types of fuel, respectively, are defined as the first and second inputs and pollutants, as the undesirable output of the production sector. In the second stage, i.e. the transmission part, the expected outputs including the total income and the covered area have been considered.

In the study of production processes, the effect of changing one indicator on one or more other indicators can provide managers with valuable information. Such exchanges between inputs or outputs are known as marginal rates and marginal productivity. Therefore, the estimation of such rates is a significant issue.

Results

Power plants of each country are considered as one of the most important pillars of growth and development of the country and has a significant impact on increasing the welfare of people. In this paper, 21 provincial power stations have been studied.

In this way, by considering a two-stage structure and with undesirable outputs, the effect of an index on the intermediate product and then the effect of this change on the final output of the system have been studied. For this purpose, during a four-step process, marginal productivity has been calculated for each component of the production process. As can be seen from the results, in a two-step process, any change in the first

component can be transferred to the second component through the intermediate product. In this study, the aim is to measure the amount of personnel cost changes on the total income of power plants.

Conclusion

In production theory, studying the effect of one indicator on one or more other indicators is important as long as we are addressing multi-stage processes. Such exchanges in economics are known as marginal rate and marginal productivity. In this paper, focusing on 21 provincial power plants that have two-stage structures and undesirable outputs, for the first time, through a four-stage process, the effect of changes in the input indicators on the intermediate index and then its effect on the outputs is addressed. According to this study, any increase or decrease in the inputs of the first component of the two-stage network can be transferred to the final product through changes in the intermediate index, so it is possible to manage the final outputs of the entire system by changing the inputs of the first component and maintaining the efficiency. In order to provide suggestions for future studies, it is recommended to study networks with more components and a combination of series and parallel modes. Also, the studied network should be analyzed on other industries with a similar structure.

Keywords: data envelopment analysis, two-stage structure, marginal productivity, undesirable output.

تخمین بهره‌وری حاشیه‌ای در شبکه‌های دو مرحله‌ای با حضور خروجی‌های نامطلوب

دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، واحد رشت،
 دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

مریم شریفی 

استاد گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد
 اسلامی، لاهیجان، ایران

سهراب کردرستمی  *

استادیار گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، واحد رشت، دانشگاه آزاد
 اسلامی، رشت، ایران

لیلا خوش‌اندام 

چکیده

در تکنولوژی تولید مطالعه اثر یک شاخص بر روی یک یا چند شاخص دیگر با حفظ کارایی، تحت عنوان نرخ حاشیه‌ای می‌تواند اطلاعات ارزنده‌ای را به منظور مدیریت بهتر سیستم در اختیار مدیران قرار دهند. در این مقاله هدف مطالعه تاثیر شاخص‌های معنادار بر هم و در ساختار دو مرحله‌ای خاص و با حضور خروجی‌های نامطلوب می‌باشد. در این مطالعه بر خلاف مطالعات پیشین تکنولوژی تولید در ساختار دو مرحله‌ای به دو زیر تکنولوژی افزاز می‌شود و سپس با تمرکز بر مبحث کاربردی، ابتدا اثر ورودی مشخص از مرحله اول بر روی شاخص میانی سنجیده شده است و سپس با محاسبه تغییرات صورت پذیرفته در این شاخص که توسط مدل پیشنهادی محاسبه شده است به عنوان عامل انتقال اثر آن بر روی خروجی نهایی خاص سنجیده می‌شود. در این مقاله با تمرکز روی داده‌های جمع‌آوری شده از ۲۱ نیروگاه برق استانی که متشکل از بخش‌های وابسته به هم "تولید" و "انتقال" می‌باشند، هر واحد ساختاری مشابه ساختار بیان شده دارند. با توجه به افزاز تکنولوژی کل اثر افزایش یا کاهش مولفه انواع سوخت تحت عنوان ورودی مرحله اول بر روی جریان الکتریسیته گرفته شده و سپس تغییرات جریان الکتریسیته بر روی درآمد کل سیستم سنجیده می‌شود.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، ساختار دو مرحله‌ای، بهره‌وری حاشیه‌ای، خروجی نامطلوب.

* نویسنده مسئول: sohrabkordrostami@gmail.com

مقدمه

در دنیای امروز یکی از ابزارهای مناسب و کارآمد در زمینه‌ی سنجش و ارزیابی بهره‌وری، تحلیل پوششی داده‌ها^۱ می‌باشد (جهانی‌صیادنویری و کردرستمی، ۲۰۲۴). در این تکنیک که یک روش غیرپارامتری و مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی است، کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارزیابی می‌شود. استفاده از مدل‌های DEA علاوه بر تعیین میزان کارایی نسبی، نقاط ضعف سازمان‌ها را در شاخص‌های مختلف تعیین کرده و با ارائه میزان مطلوب آنها، خط مشی سازمان را به سوی ارتقای کارایی و بهره‌وری مشخص می‌کند. از آنجایی که ارزیابی عملکرد سازمان‌ها در جهت‌گیری مدیران نقش اساسی دارد، در این راستا می‌بایست میزان کارایی و بهره‌وری سازمانها مورد محاسبه قرار گیرد تا از این طریق بتوان در تصمیم‌سازی‌های آتی روند رشد اقتصادی را زیر نظر داشت (Faozen et al. (2024). در ارزیابی عملکرد با به کارگیری این تکنیک معمولاً بیش از یک واحد تصمیم‌گیری در وضعیت کارا قرار می‌گیرند، بنابراین یک مرز یا الگو از واحدهای تصمیم‌گیری که دارای بهترین عملکرد هستند ساخته می‌شود، سپس کارایی واحد مورد نظر نسبت به آن مرز سنجیده می‌شود. این مرز دارای مشخصات و خواص مهمی می‌باشد که مطالعه بر روی این خواص می‌تواند منجر به ارزیابی بهتر و دقیق‌تر واحدهای تصمیم‌گیرنده و نیز پیشنهادات سازنده در جهت استفاده‌ی بهینه از امکانات و شرایط موجود در جهت بالا بردن سطح کارایی برای مدیران سازمان‌ها شود.

در مدل‌های DEA کلاسیک، هدف اصلی افزایش خروجی‌ها در ازای کاهش ورودی‌ها می‌باشد، اما در برخی از فرآیندهای تولید اغلب به همراه خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های دیگری تحت عنوان خروجی‌های نامطلوب^۲ تولید می‌شوند که درصدد کاهش تولید آنها می‌باشیم. آلودگی هوا، آلاینده‌ها، محصولات زائد، گازهای مضر تولید شده توسط نیروگاه-های برق و ... از جمله این خروجی‌های نامطلوب می‌باشند. در تحلیل پوششی داده‌ها، دیدگاه‌های متفاوتی در مواجهه با این گونه خروجی‌ها بیان شد و مورد مطالعه قرار گرفت که یکی از منطقی‌ترین و متداول‌ترین روش برای مدیریت آن گونه خروجی‌ها، استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف^۳ از دیدگاه Kuosmanen (2005) می‌باشد که در این مطالعه

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

² Undesirable outputs

³ Weak disposability

از آن استفاده شده است.

در مدل‌های سنتی DEA واحدهای تصمیم‌گیری به صورت جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شدند. یعنی برای ارزیابی عملکرد، تنها اطلاعات مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها لازم بود و عملیات داخلی DMUها در ارزیابی عملکرد آنها نادیده گرفته می‌شد. اما در دنیای واقعی با فرآیندهای تولیدی مواجه هستیم که برای تولید محصولات نهایی دارای ساختارهای شبکه‌ای دو مرحله‌ای یا چند مرحله‌ای می‌باشند و استفاده از مدل‌های کلاسیک DEA برای این گونه فرآیندها بدون در نظر گرفتن مؤلفه‌های داخلی شبکه ممکن است موجب نادیده گرفتن عدم کارایی برخی مؤلفه‌های فرآیند و نهایتاً ارزیابی اشتباه عملکرد کل سیستم گردد، از این رو تأثیر ساختار داخلی DMUها در عملکرد و کارایی آنها می‌تواند از اهمیت بسیاری برخوردار باشد. لذا تکنیک تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای^۱ معرفی گردید. مدل‌های شبکه‌ای نه تنها کارایی کلی برای فرآیندهای تولید ارائه می‌کنند، بلکه امتیاز کارایی را برای هر یک از مراحل جداگانه به دست می‌آورند. مدل‌های NDEA را می‌توان براساس ساختار داخلی مؤلفه‌های عملیاتی DMUها به حالت‌های سری، موازی و یا ترکیبی دسته‌بندی کرد. بسیاری از مقالات ارائه شده در خصوص ساختار شبکه‌ای به صورت دو مرحله‌ای و از نوع ساختار سری می‌باشند که ساختار مورد استفاده در این مطالعه نیز از همین دست است.

در تئوری تولید، محاسبه‌ی اثر یک شاخص بر یک یا چند شاخص دیگر می‌تواند اطلاعات ارزشمندی را در اختیار تولید کننده و مصرف کننده قرار دهد تا بتوانند با حفظ کارایی و با جانشینی یا تبدلاتی بین ورودی‌ها و خروجی‌های خود به سطح عملکرد مطلوب دسترسی یابد. به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی در اکثر فرآیندهای تولید، معمولاً نمی‌توان یک پارامتر تصمیم را بدون تأثیر بر یک یا چند پارامتر دیگر تغییر داد. مبادله بین ورودی‌ها و خروجی‌ها در علم اقتصاد تحت عنوان نرخ‌های حاشیه‌ای^۲ و بهره‌وری حاشیه‌ای^۳ و در ریاضیات با عنوان مشتقات جزئی شناخته می‌شوند. اگرچه در مدل‌های DEA، نسبت ضرایب بهینه این اطلاعات را فراهم می‌نماید، اما به دلیل ماهیت قطعه قطعه خطی مرز و همچنین به علت چندگانگی این ضرایب، نرخ‌های حاشیه‌ای نیز به صورت منحصر به فرد نخواهد بود. محققین

^۱ Network Data Envelopment Analysis (NDEA)

^۲ Marginal Rate

^۳ Marginal Productivity

راهکارهایی در این زمینه ارائه نمودند که در بخش‌های بعدی به آنها پرداخته شده است. در مجموع، با دانستن این نرخ‌ها می‌توان پیشنهادات ارزنده‌ای را به منظور بهبود عملکرد کلی سیستم به مدیران ارائه نمود. نرخ حاشیه‌ای تاثیر تغییر یک شاخص ورودی یا خروجی بر روی شاخص ورودی یا خروجی دیگر می‌باشد اما با وجود محصول میانی در شبکه و با توجه به اینکه هدف ما محاسبه‌ی تاثیر تغییر شاخص ورودی بر شاخص خروجی می‌باشد ناگزیر به استفاده از بهره‌وری حاشیه‌ای می‌باشیم. در بخش‌های آتی توضیحات بیشتری آورده شده است.

نتایج حاصل از بررسی پژوهش‌های گوناگون بیانگر این نکته است که در زمینه محاسبه‌ی نرخ‌های حاشیه‌ای و بهره‌وری حاشیه‌ای در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها در شبکه‌های تولید دو مرحله‌ای و با حضور عوامل نامطلوب اساساً مطالعات فراوانی صورت نگرفته است. لذا محاسبه‌ی تاثیر تغییر در ورودی آغازی بر خروجی نهایی با در نظر گرفتن شاخص‌های میانی به عنوان انتقال دهنده‌ی این تغییر در خصوص شاخص‌های نامطلوب همچنان به عنوان یک خلاء تحقیقاتی در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها به چشم می‌خورد. بنابراین در این مقاله فرآیندی چهار مرحله‌ای برای به دست آوردن بهره‌وری حاشیه‌ای در یک سیستم تولید دو مرحله‌ای با حضور عوامل نامطلوب ارائه گردیده است. برای این منظور ابتدا مدل کارایی سنجی برای ارزیابی امتیاز کارایی سیستم‌های دو مرحله‌ای با حضور خروجی‌های نامطلوب پیشنهاد شده است. سپس با ایده گرفتن از روش (Asmild et al. 2006) که برای محاسبه‌ی نرخ‌های حاشیه‌ای راست و چپ مطرح نمودند، بهره‌وری حاشیه‌ای در شبکه‌ی پیشنهادی محاسبه گردید.

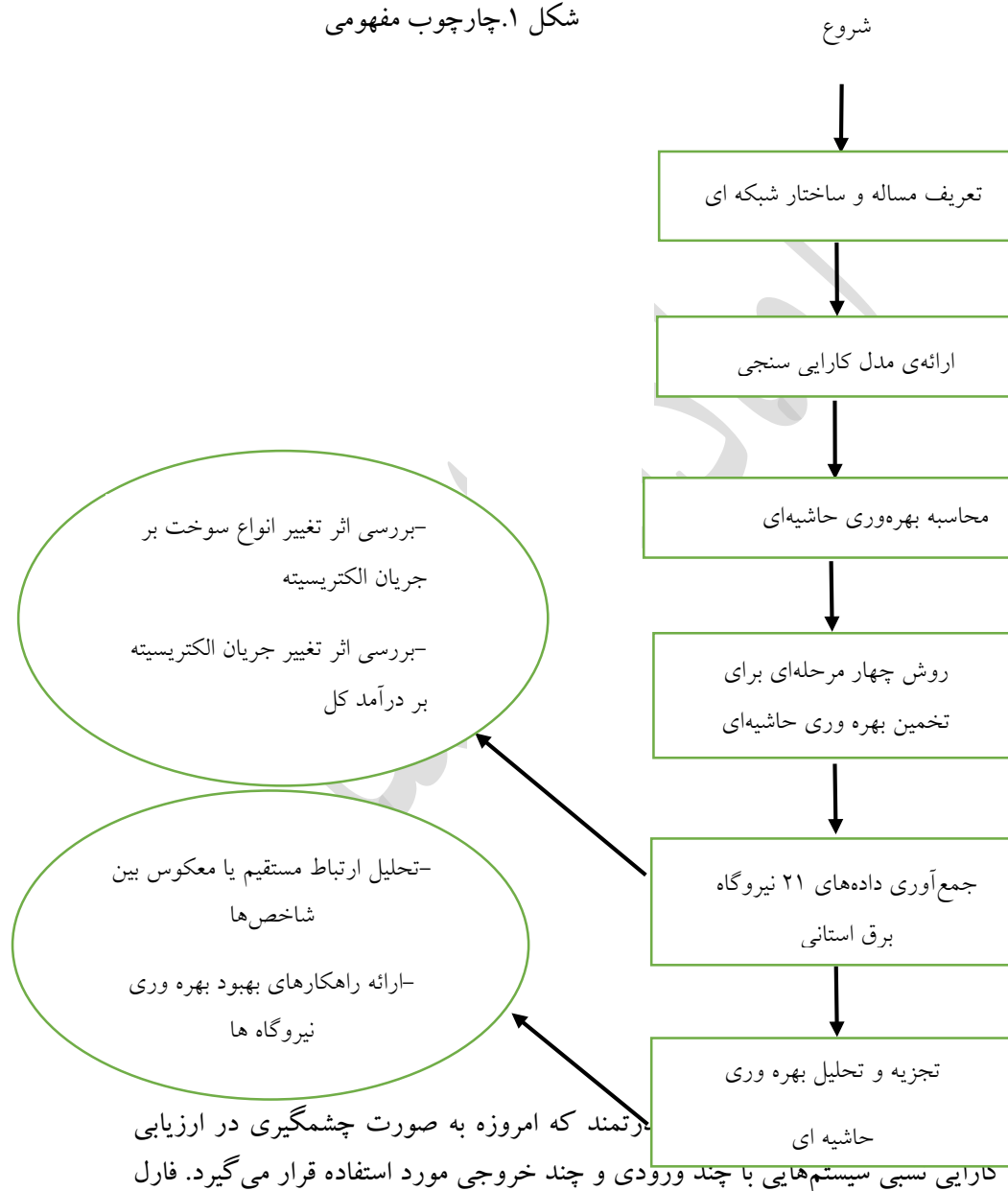
نوآوری این تحقیق محاسبه‌ی بهره‌وری حاشیه‌ای در فرآیند تولید دو مرحله‌ای با حضور خروجی‌های نامطلوب می‌باشد. در این تحقیق، بر خلاف روش‌های قبلی، شاخص‌های میانی

به عنوان عامل انتقال تغییر در نظر گرفته می‌شوند و نقش مهمی ایفا می‌کنند. در بخش کاربردی نیز برای نخستین بار مطالعه محاسبه‌ی بهره‌وری حاشیه‌ای در بخش انرژی به عنوان یک فرآیند تولید دو مرحله‌ای از نوآوری این بخش می‌باشد. گام‌های پژوهش به صورت



یک روندنما در زیر مشخص گردیده است. چارچوب مفهومی این تحقیق در شکل (۱) آمده است:

شکل ۱. چارچوب مفهومی



نخستین کسی بود که در سال ۱۹۵۷ توسط روش‌های غیرپارامتری به ارزیابی کارایی پرداخت و ایده‌ی اولیه برای ایجاد تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها توسط او مطرح شد. کارهای بعدی در این زمینه توسط Charnes et al. (1978) و Banker et al. (1984) گسترش یافت. امروزه روش تحلیل پوششی داده‌ها با سرعت زیادی در حال گسترش بوده و به‌عنوان ابزاری مؤثر برای سنجش عملکرد سازمان‌هایی مانند بانک‌ها، مراکز آموزشی و بیمارستان‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدل‌ها از جنبه‌های نظری و کاربردی پیشرفت‌های زیادی داشته‌اند و آگاهی از ابعاد مختلف آن‌ها، دقت و بهینه‌سازی استفاده از آن‌ها را ضروری می‌سازد. تحلیل پوششی داده‌ها نه تنها کارایی نسبی سازمان‌ها را تعیین می‌کند، بلکه نقاط ضعف آن‌ها را در شاخص‌های گوناگون آشکار کرده و با ارائه سطح بهینه کارایی، مسیر ارتقا و بهبود بهره‌وری را برای سازمان‌ها مشخص می‌نماید. تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای که یکی از تعمیم‌های تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها در بحث کارایی سنجی، تحلیل کارایی فرآیندهای تولید با ساختارهای شبکه‌ای دو یا چند مرحله‌ای است، در دنیای واقعی بسیاری از فرآیندهای تولیدی دارای ساختار شبکه‌ای می‌باشند. Charnes et al. (1986) برای اولین بار با مطالعه بر روی کاربردی در زمینه‌ی استخدام ارتش به صورت یک فرآیند دو مرحله‌ای به این مساله پرداختند. بعدها Kao and Hwang (2008)، با ارائه‌ی رویکردی متفاوت بیان کردند که می‌توان کل فرآیند دو مرحله‌ای را به محصول کارایی این دو تجزیه کرد، در نتیجه هم کارایی کلی و هم کارایی مرحله‌ای به‌دست می‌آید. Kao (2009) یک مدل شبکه‌ای DEA برای ارزیابی کارایی سیستم و کارایی کل فرآیند پیشنهاد کرد. در مقاله‌ی مروری که توسط Kao (2014) ارائه شد، تقریباً تمام مطالعات در مورد شبکه‌ها دسته‌بندی شده است. از دیگر کارهای انجام شده در این زمینه می‌توان امیرتیموری و همکاران (۲۰۱۶)، شی و امروزنژاد (۲۰۲۱)، عمران‌ی و همکاران (۲۰۲۳)، Kao (2024) و امیرتیموری (۲۰۲۴) و Yang et al. (2024) و An et al. (2025) و Yeh (2025) اشاره نمود. با توجه به اینکه تحلیل پوششی داده‌ها با حضور خروجی‌های نامطلوب در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده نقش مهمی ایفا می‌کند و با استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها، در بسیاری از مواقع با فرآیندهای تولیدی مواجه هستیم که در آنها در قبال تولید خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های دیگری تحت عنوان خروجی‌های

نامطلوب نیز حاصل می‌شوند. دیدگاه‌های متفاوتی در مواجهه با اینگونه خروجی‌ها مطرح شده است. مطالعات گسترده‌ای در این زمینه انجام گرفته است.

Hailu and Veeman (2001) روشی را برای مواجهه با خروجی‌های نامطلوب ارائه کردند، به این ترتیب که با این خروجی‌ها را به عنوان ورودی رفتار نمودند و رویکردی را با تعریف دسترسی‌پذیری ضعیف ارائه شده توسط Shephard (1970) گسترش دادند و از یک مدل DEA کلاسیک برای ارزیابی کارایی نسبی تکنولوژی تولید استفاده کردند، پس از آن Färe and Grosskopf (2003) اظهار داشتند که در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به عنوان ورودی با قوانین فیزیک و اصول استاندارد فرآیندهای تولید در تناقض می‌باشد و از فرض دسترسی‌پذیری ضعیف استفاده کردند. پیشنهاد آنها استفاده از فاکتور انقباض یکسان برای تمام خروجی‌ها بود. در حالی که در سال Kuosmanen (2005) در مقاله خود مدعی شد که استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف شیفر در مدل‌های تحلیل DEA صحیح نیست و فاکتورهای انقباض یکسان برای تمام DMUها وجود ندارد. ایشان ساختار کلی تری ارائه نمودند. مدل پیشنهادی ایشان به منظور تفاوت قائل شدن بین واحدهای تصمیم‌گیرنده، از فاکتورهای انقباض غیریکسان استفاده می‌کند و این تفاوت در فاکتور انقباض به ازای هر واحد تصمیم‌گیرنده می‌باشد. برخی از مطالعات انجام گرفته در این زمینه می‌توان به Seiford et al. (2002)، جهانشاهلو و همکاران ۲۰۰۴، امیر تیموری و همکاران در سال ۲۰۰۶ و Färe and Grosskopf (2009) اشاره نمود.

علاوه بر این با توجه به اینکه عوامل نامطلوب تأثیر به سزایی در ارزیابی عملکرد فرآیندهای با ساختار شبکه‌ای دارد، مطالعات کمی در این زمینه صورت پذیرفته است که می‌توان از آن جمله به مقاله‌ی کردرستمی و امیر تیموری (۲۰۰۵) اشاره نمود. ایشان سیستم چند مرحله‌ای با وجود محصول میانی نامطلوب را در نظر گرفتند و مدلی مضربی برای ارزیابی عملکرد واحدها در این حالت ارائه دادند. Fukuyama and Weber (2010) عملکرد DMUها با حضور خروجی‌های نامطلوب را با استفاده از یک مدل شبکه‌ی دو مرحله‌ای بررسی کردند. سپس در سال Lozano et al. (2013) ساختار جامع شبکه را با حضور خروجی‌های نامطلوب مورد مطالعه قرار دادند و با استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها و فاکتور انقباض یکسان برای تمام واحدها، مجموعه امکان تولید را برای ساختار شبکه‌ای معرفی کردند. مقبولی و همکاران در سال ۲۰۱۴ به تجزیه و تحلیل ساختار شبکه‌ی دو مرحله‌ای در

حضور خروجی‌های نامطلوب در حالتی که این خروجی‌های مرحله‌ی اول به عنوان ورودی نامطلوب در مرحله‌ی دوم مورد استفاده قرار می‌گرفت را مورد بحث و بررسی قرار دادند. آنها برای ساختن مجموعه امکان تولید در حضور خروجی‌های نامطلوب از اصل دسترسی-پذیری ضعیف برای خروجی‌ها و از فاکتورهای انقباض مجزا استفاده کردند. از جمله مطالعات اخیر صورت پذیرفته در زمینه‌ی تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با حضور عوامل نامطلوب می‌توان به Yang et al. (2024) و پورعلیزاده و همکاران ۱۴۰۰ و خسروی و همکاران ۱۴۰۱ و ... اشاره نمود. مفهوم دیگری که در تئوری اقتصاد خرد برای تحلیل مرز تکنولوژی از اهمیت بالایی برخوردار است و توجه محققین را به خود جلب کرده است محاسبه‌ی نرخ‌های حاشیه‌ای و بهره‌وری حاشیه‌ای است که به مطالعه‌ی تأثیر تغییر یک شاخص بر روی یک شاخص دیگر می‌پردازد. در دو دهه‌ی اخیر گام‌های مهمی در جهت توسعه نرخ‌های حاشیه‌ای با استفاده از مدل‌های DEA توسط محققین برداشته شده است. Huang et al. (1997) اولین کسانی بودند که یک روش کلی برای تعیین نرخ تغییرات خروجی به ورودی روی مرز کارا در DEA پیشنهاد دادند. با همین دیدگاه Rosen (1998) به طور مستقیم مسئله نرخ حاشیه‌ای جانشینی در مرزهای کارا را مورد مطالعه قرار داد و چارچوب کلی برای محاسبه تبادلات بین متغیرها در DEA ارائه کردند و دو روش برای محاسبات مشتقات چپ و راست در مبادلات نرخ حاشیه‌ای مطرح کردند و همچنین تعریف نرخ حاشیه‌ای و انواع آن را در مقاله خود بیان نمودند. در مقاله‌ای که توسط Cooper et al. (2000) ارائه شد، از مدل جمعی DEA برای تعیین نرخ‌های حاشیه‌ای و کشسانی جانشینی برای واحدهای کارا استفاده شد. بعدها Asmild et al. (2006) نگاه متفاوتی به مسئله‌ی تخمین نرخ‌های حاشیه‌ای داشتند. ایشان با استفاده از شکل پوششی مدل BCC و طی یک فرآیند چهار مرحله‌ای به محاسبه نرخ حاشیه‌ای جانشینی پرداختند. فرآیند بیان شده توسط آنها برای محاسبه‌ی تبادلات بیشتر بین شاخص‌ها در DEA به عنوان نرخ حاشیه‌ای جانشینی معرفی گردید. در سال‌های ۲۰۱۴ و ۲۰۱۵ خوش اندام و همکاران به ترتیب با حضور عوامل غیراختیاری و عوامل نامطلوب در تکنولوژی تولید، نرخ‌های حاشیه‌ای را با استفاده از کاربرد در صنعت بانکداری مورد بحث و بررسی قرار می‌دهند. امیر تیموری و همکارانش در سال ۲۰۲۴ نرخ حاشیه‌ای از تغییرات تکنیکی و تأثیر آن در تحلیل پوششی داده‌های

تصادفی را بر روی ۳۱ نیروگاه برق مورد مطالعه قرار دادند. از دیگر مطالعات صورت گرفته در این زمینه می‌توان به محبوبی و همکاران ۲۰۲۱ نیز اشاره کرد.

✓ کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها در صنایع

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یکی از تکنیک‌های قدرتمند در ارزیابی عملکرد و سنجش کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUs) است. این روش که مبتنی بر مدل‌های ریاضی و بهینه‌سازی است، بدون نیاز به دانستن شکل دقیق تابع تولید، به مقایسه و رتبه‌بندی واحدهای مشابه می‌پردازد. در ادامه، برخی از کاربردهای مهم این روش در صنایع مختلف بررسی آورده شده است:

✓ بانکداری و مؤسسات مالی

در صنعت بانکداری، از تکنیک DEA برای ارزیابی کارایی شعب مختلف بانک‌ها از نظر مصرف منابع (کارکنان، سرمایه، تجهیزات) و خدمات ارائه‌شده (تعداد حساب‌ها، تسهیلات اعطایی، سودآوری و...) استفاده می‌شود. این روش به بانک‌ها کمک می‌کند تا شعب ناکارآمد را شناسایی کرده و استراتژی‌های بهبود را تدوین کنند.

✓ بیمارستان‌ها و مراکز درمانی

بخش بهداشت و درمان از DEA برای ارزیابی عملکرد بیمارستان‌ها، کلینیک‌ها و سایر مراکز درمانی استفاده می‌کند. معیارهای ارزیابی شامل تعداد بیماران، میزان استفاده از تخت‌های بیمارستانی، تعداد جراحان و پرستاران، میزان هزینه‌ها و کیفیت خدمات درمانی است. نتایج این تحلیل به بهبود بهره‌وری در سیستم سلامت کمک می‌کند.

✓ مراکز آموزشی و دانشگاه‌ها

در حوزه آموزش، DEA برای سنجش کارایی دانشگاه‌ها، مدارس و مؤسسات آموزشی مورد استفاده قرار می‌گیرد. عوامل ورودی شامل تعداد اساتید، منابع مالی و تعداد دانشجویان و عوامل خروجی شامل نرخ فارغ‌التحصیلی، کیفیت آموزش، مقالات علمی منتشر شده و اشتغال فارغ‌التحصیلان هستند. این تحلیل به بهبود سیاست‌های آموزشی و تخصیص بهینه منابع کمک می‌کند.

✓ نیروگاه‌ها و پالایشگاه‌ها

در صنایع انرژی، مانند نیروگاه‌ها و پالایشگاه‌ها، تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی بهره‌وری مصرف سوخت، میزان تولید انرژی، هزینه‌های عملیاتی و میزان آلاینده‌های زیست‌محیطی استفاده می‌شود. این اطلاعات به شرکت‌های انرژی کمک می‌کند تا بهره‌وری خود را افزایش داده و اثرات زیست‌محیطی را کاهش دهند.

✓ حمل و نقل و پست

شرکت‌های حمل و نقل و پست از DEA برای بررسی کارایی ناوگان حمل‌ونقل، زمان تحویل بسته‌ها، مصرف سوخت و هزینه‌های عملیاتی بهره می‌برند. این ارزیابی می‌تواند در بهینه‌سازی مسیرها، کاهش هزینه‌ها و بهبود کیفیت خدمات حمل‌ونقل مؤثر باشد. تعدادی از مطالعات صورت گرفته در سال‌های اخیر در جدول (۱) آورده شده است. ستون‌های این جدول به ترتیب شامل عنوان مقاله، عنوان نویسنده، سال نشر مقاله و نام ژورنال می‌باشد. سطر آخر به تحقیق انجام‌شده توسط نویسندگان این مقاله و صنعت مربوطه اشاره دارد.

در بین صنایع مختلف از آنجایی که صنعت برق و نیروگاه‌های تولید برق هر کشور را می‌توان یکی از مهمترین عوامل و ضروری در رشد و توسعه آن کشور قلمداد کرد و با توجه به اینکه برنامه‌ریزی مناسب انرژی برق به عنوان یکی از شاخص‌های مهم توسعه اقتصادی کشور و تأثیر به سزایی بر سطح رفاه زندگی مردم جامعه دارد. مطالعاتی در این زمینه صورت گرفته است. از جمله مطالعات اخیر می‌توان به مقاله‌ی Gao et al. (2023) اشاره کرد که یک ارزیابی جامع از اهمیت گره‌های شبکه برق بر اساس تکنولوژی DEA انجام می‌دهد. همچنین، Meng et al. (2023) به ارزیابی بهره‌وری کل عوامل صنعت برق حرارتی چین با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای پرداختند. از جمله مطالعات صورت پذیرفته در این راستا می‌توان به فلاحی و همکاران ۱۳۸۴ و امانی و همکاران ۱۳۹۷ و An and Zhai (2020) و Wei and Zhao (2024) و Zhang et al. (2024) اشاره کرد.

با توجه به مطالعات صورت گرفته و با علم به ضرورت بر مطالعه‌ی بیشتر در خصوص استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها در زمینه‌ی کاربرد صنعت برق، در این مقاله با در نظر گرفتن یک ساختار دو مرحله‌ای خاص و در حضور خروجی نامطلوب، به بررسی تأثیر تغییرات

شاخص ورودی بر محصول میانی و سپس اثرات آن بر خروجی مطلوب نهایی پرداخته شده است. در این راستا، یک مدل نوین برای سنجش کارایی ساختار پیشنهادی ارائه شده و در ادامه، طی یک فرآیند چهارمرحله‌ای، بهره‌وری حاشیه‌ای هر مؤلفه از ساختار دو مرحله‌ای به‌طور مستقل محاسبه شده است.

بخش‌های این مقاله به این صورت سازماندهی شده‌اند: در بخش سوم به بیان مسأله و روش‌شناسی مقاله پرداخته شده که خود شامل زیربخش‌هایی برای تعاریف و نحوه‌ی محاسبه‌ی نرخ‌های حاشیه‌ای و بهره‌وری حاشیه‌ای می‌باشد. در بخش چهارم نیز برای نشان دادن نحوه‌ی عملکرد روش پیشنهادی، فرآیند ذکر شده در بخش قبل را بر روی ۲۱ نیروگاه برق استانی که دارای ساختاری مشابه با مدل مورد بررسی هستند، اجرا و نتایج حاصل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و نهایتاً، نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای مطالعات آتی در بخش پنجم گنجانده شده است.

جدول ۱. برخی از مطالعات اخیر در حوزه‌ی برخی از صنایع

عنوان مقاله	نویسنده و سال نشر	نام ژورنال	صنعت مورد مطالعه
کارایی فنی و توانایی مدیریتی در فرآیندهای تولید دو مرحله‌ای با محصولات نامطلوب: موردی در بانک‌های آسیایی	امیر تیموری (۲۰۲۴)	Socio-Economic Planning Sciences	صنعت بانکداری
روش یکسان سازی امتیاز کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از مدل‌های مبتنی بر سستی با کاربرد در بانکداری	هادی و همکاران (۲۰۲۵)	Decision Analytics Journal	صنعت بانکداری
کارایی مراقبت‌های بهداشتی عمومی در هند: برآوردها و عوامل تعیین‌کننده با استفاده از رویکرد DEA دو مرحله‌ای	Dar and Raina (2024)	Evaluation and Program Planning	حوزه‌ی سلامت

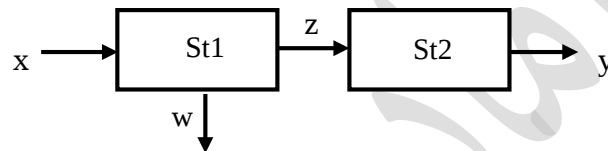
تحلیل پوششی داده های تصادفی در حضور خروجی های نامطلوب: کاربرد در صنعت برق	امیر تیموری و همکاران (۲۰۲۴)	OR Spectrum	صنعت برق
تخصیص و تصمیم گیری منابع مراقبت های بهداشتی منطقه ای: ارزیابی اثربخشی مدل سه مرحله ای سوپر کارایی DEA	Liu et al. (2024)	Heliyon	حوزه سلامت
ارزیابی بهره وری کل عوامل صنعت برق حرارتی چین با استفاده از رویکرد DEA شبکه با کارایی متقاطع	Meng (2023)	Energy Reports	صنعت برق

نواوری این مقاله	صنعت مورد مطالعه در این مقاله
------------------	-------------------------------

- محاسبه بهره وری حاشیه ای در یک ساختار شبکه ای دو مرحله ای قطعی در حضور خروجی های نامطلوب با ارائه رویکردی نوین
- سنجش اثر تغییرات یک شاخص ورودی در مؤلفه اول ساختار بر روی یک شاخص میانی و سپس یافتن اثر این تغییر بر روی شاخص خروجی در مؤلفه دوم فرآیند دو مرحله ای
- اجرای روش پیشنهادی برای نخستین بار بر روی داده های واقعی از ۲۱ نیروگاه استانی برق منطقه ای به صورت یک شبکه

روش شناسی تحقیق^۱¹ Methodology

در این مطالعه فرض بر این است که n واحد تصمیم گیرنده DMU_j ($j = 1, \dots, n$) به منظور بررسی موجودند. هر کدام از این واحدها طی یک فرآیند تولید دو مرحله‌ای ورودی‌هایی را به منظور تولید خروجی‌هایی به این صورت مصرف می‌کنند که در مرحله‌ی اول I ورودی x_i ($i = 1, \dots, I$) برای تولید K خروجی نامطلوب w_k ($k = 1, \dots, K$) و D خروجی مطلوب z_d ($d = 1, \dots, D$) مورد استفاده قرار می‌گیرند. سپس در مرحله‌ی دوم D خروجی مطلوب z_d تحت عنوان شاخص‌های میانی و به عنوان ورودی‌های این مرحله برای تولید R خروجی مطلوب نهایی y_r ($r = 1, \dots, R$) مصرف می‌شوند. ساختار کلی این فرآیند در شکل ۱-۳ نمایش داده شده است.



شکل ۲. ساختار شبکه‌ی دو مرحله‌ای با حضور خروجی‌های نامطلوب

یک مدل پیشنهادی برای کارایی سنجی ساختار دو مرحله‌ای به قرار زیر است:

در این بخش یک مدل کارایی سنجی پیشنهادی مبتنی بر ساختار شبکه‌ای ارائه شده در شکل (۲) معرفی شده است. برای این منظور با الهام از اصل دسترسی پذیری ضعیف Kuosmanen(2005) مجموعه امکان تولید برای این گونه فرآیندها با حضور خروجی‌های نامطلوب به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$T = \left\{ (x, w, z, y) \left| \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_i & i = 1, \dots, I, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j w_{kj} = w_k & k = 1, \dots, K, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j z_{dj} - \tilde{z}_d \geq 0 & d = 1, \dots, D, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 & j = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} - \tilde{z}_d \leq 0 & d = 1, \dots, D, \\ \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_r & r = 1, \dots, R, \\ \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \\ \mu_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

که در آن $\theta_j (j = 1, \dots, n)$ فاکتور انقباض مجزا برای هر DMU_j است. واضح است که تکنولوژی (۱) غیر خطی است و به منظور خطی سازی این تکنولوژی تغییر متغیرهای زیر اعمال می‌شود:

$$\lambda_j \theta_j = \rho_j, \quad (1 - \theta_j) \lambda_j = \beta_j, \quad \lambda_j = \rho_j + \beta_j$$

با استفاده از این تغییر متغیرها می‌توان تکنولوژی فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
T_{total} = \left\{ (x, w, z, y) \right\} & \left| \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) x_{ij} \leq x_i \quad i = 1, \dots, I, \right. \\
& \sum_{j=1}^n \rho_j w_{kj} = w_k \quad k = 1, \dots, K, \\
& \sum_{j=1}^n \rho_j z_{dj} - \tilde{z}_d \geq 0 \quad d = 1, \dots, D, \\
& \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) = 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} - \tilde{z}_d \leq 0 \quad d = 1, \dots, D, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_r \quad r = 1, \dots, R, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \\
& \rho_j, \beta_j, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \}
\end{aligned} \tag{۲}$$

با توجه به تکنولوژی (۲)، مدل کارایی سنجی برای ساختارهایی با فرآیند دو مرحله‌ای و با حضور خروجی‌های نامطلوب به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \quad \varphi \\
& \text{s.t} \quad \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) x_{ij} \leq x_{i_o} \quad i = 1, \dots, I \\
& \quad \sum_{j=1}^n \rho_j w_{kj} = w_{k_o} \quad k = 1, \dots, K \\
& \quad \sum_{j=1}^n \rho_j z_{dj} \geq \tilde{z}_d \quad d = 1, \dots, D \\
& \quad \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) = 1 \\
& \quad \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} \leq \tilde{z}_d \quad d = 1, \dots, D
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq \varphi y_{ro} \quad r = 1, \dots, R$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$$

$$\rho_j, \beta_j, \mu_j \geq 0, \quad \tilde{z}_d \geq 0$$

که در این مدل x_{ij} ورودی ها، w_{ko} خروجی های نامطلوب، z_{dj} محصولات میانی و y_{ro} خروجی های نهایی می باشند.

محاسبه نرخ حاشیه ای و بهره وری حاشیه ای

در مطالعه ی فرآیندهای تولید، اثر تغییر یک شاخص بر یک یا چند شاخص دیگر می تواند اطلاعات ارزشمندی به منظور تجزیه و تحلیل ساختار تولید در اختیار مدیران قرار دهد. چنین مبادلاتی بین ورودی ها و یا خروجی ها تحت عنوان نرخ های حاشیه های و بهره وری حاشیه ای شناخته می شوند. از این رو تخمین این گونه نرخ ها موضوع قابل توجهی در تئوری تولید می باشد.

بر اساس مطالعات روزن و همکاران (۱۹۹۸) فرض کنیم بردار خروجی $y = (y_1, \dots, y_s) \in R_+^s$ توسط بردار ورودی $x = (x_1, \dots, x_m) \in R_+^m$ تولید شود و همچنین برای سهولت در نمادگذاری، از شاخص $z \equiv (-x, y)$ استفاده شود. لذا طبق این فرض مرز تولید توسط $\{z \mid F(z) = 0\}$ مشخص می شود که تابعی پیوسته، قطعه قطعه خطی، مشتق پذیر است.

تعریف - نرخ حاشیه ای شاخص i ام نسبت به شاخص j ام در نقطه $z_0 \equiv (-x_0, y_0)^T$ بر روی مرز $F(z_0) = 0$ به صورت مشتق جزئی زیر معرفی خواهد شد که با حفظ کارایی به معنای میزان تغییر در شاخص i ام نسبت به شاخص j ام است مادامی که مابقی شاخص ها ثابت فرض شده باشند:

$$MR_{ij}(z_0) \equiv \left. \frac{\partial z_i}{\partial z_j} \right|_{z_0} = - \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial z_j} \right|_{z_0}}{\left. \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|_{z_0}} \quad i \neq j \quad (4)$$

در مشتق جزئی محاسبه شده در (۴) مادامی که شاخص Z_j اشاره به دو ورودی دارد و تأثیر یک شاخص ورودی بر روی شاخص ورودی دیگر سنجیده می‌شود، این نرخ تحت عنوان نرخ حاشیه‌ای جانشینی تعریف می‌شود. مادامی که اثر تغییرات یک شاخص خروجی بر شاخص خروجی دیگر بررسی می‌شود نرخ (۴) نرخ حاشیه‌ای انتقال گفته می‌شود و وقتی شاخص Z_j به یک ورودی و یک خروجی اشاره دارد به مشتق جزئی ذکر شده نرخ بهره‌وری یا بهره‌وری حاشیه‌ای می‌گویند.

اما در نقاطی بر روی یال‌ها به دلیل وجود جواب بهینه‌ی چندگانه و منحصر به فرد نبودن ضرایب، مشتقات جزئی موجود نخواهند بود. لذا در این نقاط نرخ‌های حاشیه‌ای نیز به صورت منحصر به فرد تعریف نخواهند شد. ایشان عنوان کردند که یک راه برای رفع این مشکل در نقطه‌ی مورد نظر، محاسبه‌ی نرخ‌های حاشیه‌ای راست و چپ است.

تعریف - با فرض $Z_0 = (Z_{10}, \dots, Z_{(m+s)0})^T$ در مجموعه امکان تولید، نرخ حاشیه‌ای j -امین شاخص به k -امین شاخص در Z_0 به این صورت تعریف می‌شود:

$$MR_{jk}^+(Z_0) = \left(\frac{\partial Z_{jo}}{\partial Z_{ko}} \right)_{Z_0^+} \quad (5)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{Z_{jo}'(Z_{10}, \dots, Z_{ko} + h, \dots, Z_{m+s,0}) - Z_{jo}(Z_{10}, \dots, Z_{ko}, \dots, Z_{m+s,0})}{h}$$

$$MR_{jk}^-(Z_0) = \left(\frac{\partial Z_{jo}}{\partial Z_{ko}} \right)_{Z_0^-} \quad (6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{Z_{jo}'(Z_{10}, \dots, Z_{ko} + h, \dots, Z_{m+s,0}) - Z_{jo}(Z_{10}, \dots, Z_{ko}, \dots, Z_{m+s,0})}{h}$$

در (Asmild et al. (2006) طی یک فرآیند ۴-مرحله‌ای تخمینی بر نرخ‌های حاشیه‌ای که به صورت زیر بیان شده است را ارائه نمودند:

۱- یک مقدار کوچک، مثبت و دلخواه h انتخاب و افزودن آن به شاخص k -ام در نظر گرفته می شود.

۲- مقدار بهینه z_{jo}^* که حاصل اندک افزایش در شاخص k -ام است از طریق حل کردن مسئله LP زیر به دست آورده می شود.

$$\begin{aligned} \text{Max } z_{jo}^* \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (7)$$

$$(z_{1o}, \dots, z_{ko} + h, \dots, z_{jo}^*, \dots, z_{m+s,o}) \in T$$

۳- نرخ حاشیه ای راست به صورت زیر محاسبه می شود:

$$MR_{jk}^+(z_o) = \frac{z_{jo}^* - z_{jo}}{h} \quad (8)$$

۴- با جایگزینی $h = -h$ در گام ۲، نرخ حاشیه ای چپ نیز قابل محاسبه است. در ادامه روند ذکر شده در فوق که برای تخمین نرخ های حاشیه ای چپ و راست مورد استفاده قرار گرفته است برای محاسبه نرخ های حاشیه ای و بهره وری حاشیه ای فرآیند دو مرحله ای نشان داده شده در شکل (۲) به کار برده می شود.

با توجه به فرآیند تولید دو مرحله ای بیان شده در شکل (۲) و با توجه به تکنولوژی (۲)، $T^{(1)}$ و $T^{(2)}$ که به ترتیب تکنولوژی های مؤلفه های اول و دوم فرآیند ذکر شده می باشند به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} T^{(1)} = \left\{ (x, w, z) \mid \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) x_{ij} \leq x_i \quad i = 1, \dots, I, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n \rho_j w_{kj} = w_k \quad k = 1, \dots, K, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n \rho_j z_{dj} - z_d \geq 0 \quad d = 1, \dots, D, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) = 1, \rho_j, \beta_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
T^{(2)} = \{ (z, y) \mid & \sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} - z_d \leq 0 & d = 1, \dots, D, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_r & r = 1, \dots, R, \\
& \sum_{j=1}^n \mu_j = 1, \quad \mu_j \geq 0 & j = 1, \dots, n \}
\end{aligned} \quad (10)$$

همانطور که در تکنولوژی (۲) آورده شد، تکنولوژی کل فرآیند تولید شامل تکنولوژی‌های اول و دوم خواهد بود:

$T_{total} = \{ X, W, Z, Y \mid$ شامل تمام تکنولوژی اول و دوم $\}$
 با توجه به فرآیند دو مرحله‌ای ذکر شده در شکل (۲)، می‌خواهیم تأثیر تغییر یک مؤلفه از بردار ورودی x ، x_{to} را بر روی یک مؤلفه از بردار خروجی y یعنی y_{po} بسنجیم. برای این منظور به این صورت عمل می‌کنیم که ابتدا در تکنولوژی اول $T^{(1)}$ ، تأثیر تغییر مؤلفه‌ای از بردار x یعنی x_{to} را بر روی بردار شاخص میانی Z ، z_{fo} محاسبه می‌کنیم و سپس در تکنولوژی دوم، $T^{(2)}$ ، اثر این تغییر را بر روی مؤلفه‌ای از بردار خروجی y یعنی y_{po} به دست می‌آوریم.

با پذیرفتن اصل دسترسی پذیری ضعیف، برای محاسبه‌ی بهره‌وری حاشیه‌ای در نقطه‌ی (x_o, w_o, z_o, y_o) و در تکنولوژی اول، $T^{(1)}$ ، به طریق زیر عمل می‌کنیم:
 گام ۱- انتخاب یک مقدار کوچک و مثبت برای h به منظور افزایش در شاخص t ام.
 گام ۲- حل مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به منظور بدست آوردن مقدار بهینه‌ی شاخص f ام
 یعنی $\tilde{z}_{fo}^*$

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{fo}^* &= \text{Max } \tilde{z}_{fo} \\
s.t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) x_{ij} &\leq x_{io} & i = 1, \dots, I \\
\sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) x_{ij} &= x_{io} + h
\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \rho_j w_{kj} &= w_{ko} & k=1, \dots, K \\ \sum_{j=1}^n \rho_j z_{dj} &\geq z_{do} & d=1, \dots, D, \quad d \neq f \\ \sum_{j=1}^n \rho_j z_{\bar{f}} &\geq \bar{z}_{fo} \\ \sum_{j=1}^n (\rho_j + \beta_j) &= 1 \\ \rho_j, \beta_j &\geq 0, \quad \bar{z}_{fo} \geq 0 \end{aligned}$$

گام ۳- محاسبه‌ی بهره‌وری حاشیه‌ای از رابطه‌ی زیر:

$$MP_{ft}^+(x_o, w_o, z_o, y_o) = \frac{\bar{z}_{fo}^* - z_{fo}}{h} \quad (12)$$

گام ۴- جایگزین کردن $h = -h$ و اجرای مجدد گام‌های ۲ و ۳ و محاسبه‌ی بهره‌وری حاشیه‌ای

$$MP_{ft}^-(x_o, w_o, z_o, y_o) = \frac{\bar{z}_{fo}^* - z_{fo}}{h} \quad (13)$$

با حل مدل (۱۱) و ماکزیمم کردن $\bar{z}_{fo}^*$ نقطه‌ی مورد نظر با اطمینان بر روی مرز کارایی قرار خواهد گرفت و همانطور که از قیود این مدل مشاهده می‌شود در قید پنجم مؤلفه‌ی f ام از بردار شاخص میانی z به منظور ماکزیمم نمودن در تابع هدف جدا شده و مقدار کوچک h نیز به مؤلفه‌ی t ام از بردار ورودی‌های x در قید دوم افزوده شده است. در تکنولوژی دوم، $T^{(2)}$ ، برای سنجیدن اثر این تغییر بر روی مؤلفه‌ی p -ام از بردار خروجی y ، به این صورت عمل می‌کنیم که از طریق مدل (۱۴) میزان بهینه‌ی y_{po}^* تعیین شده و سپس میزان بهره‌وری حاشیه‌ای از رابطه‌ی (۱۵) به دست می‌آید.

در مدل زیر $\bar{z}_{fo}^*$ واقع در محدودیت دوم، مقدار بهینه‌ی حاصل از مدل (۱۱) می‌باشد. حل این مدل منجر به دست آمدن بیشترین افزایش در مؤلفه‌ی p ام بردار خروجی y به ازای تغییر در مؤلفه‌ی f ام از بردار شاخص میانی z و با شرط باقی ماندن بر روی مرز کارا می‌باشد.

$$y_{po}^* = \text{Max } y_{po}$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \mu_j z_{dj} \leq z_{do} \quad d = 1, \dots, D, \quad d \neq f \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j z_{fj} \leq \tilde{z}_{fo}^*$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, \dots, R, \quad r \neq p$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y_{pj} \geq y_{po}$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1$$

$$\mu_j \geq 0, \quad y_{po} \geq 0$$

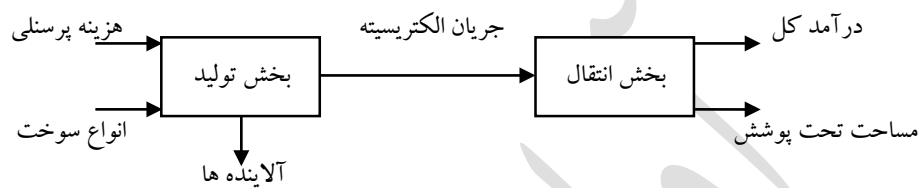
اثر این تغییر بر روی شاخص خروجی که تحت عنوان بهره‌وری حاشیه‌ای شناخته می‌شود از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$MP_{pf}(x_o, w_o, z_o, y_o) = \frac{\partial y_{po}}{\partial z_{fo}} = \frac{y_{po}^* - y_{po}}{\tilde{z}_{fo}^* - z_{fo}} \quad (15)$$

کاربرد

برای نشان دادن ماهیت کاربردی روش پیشنهادی، مدل و فرآیند بر روی داده‌های جمع آوری شده مربوط به ۲۱ نیروگاه برق استانی کشور مورد بررسی قرار داده شده و ساختار تولید برق هر نیروگاه در شکل (۳) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشخص است، فرآیند تولید برق در هر نیروگاه یک فرآیند دو مرحله‌ای می‌باشد که به ترتیب شامل بخش تولید و بخش انتقال است. جریان الکتریسیته، z ، تحت عنوان محصول میانی در بخش تولید، با ماهیت خروجی و در بخش انتقال با ماهیت ورودی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هزینه‌های پرسنلی، x_1 و انواع سوخت، x_2 ، به ترتیب تحت عنوان ورودی‌های اول و دوم و آلاینده‌ها، w ، به عنوان خروجی نامطلوب بخش تولید تعریف می‌شوند. در مرحله دوم

یعنی بخش انتقال، خروجی‌های مورد انتظار به ترتیب شامل درآمد کل، y_1 و مساحت تحت پوشش y_2 ، در نظر گرفته شده‌اند. تعداد و اسامی نیروگاه‌های استانی مورد مطالعه در این کاربرد و داده‌های معرفی شده، ورودی‌ها، محصول میانی و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب به ترتیب در جداول (۲) و (۳) و همچنین عدد کارایی هر یک از آنها تحت کارایی سنجی حاصل از حل مدل (۳) در ستون آخر جدول (۳) آورده شده است.



شکل ۳. ساختار هر واحد نیروگاه برق

جدول ۲. مقادیر اولیه ورودی‌ها و محصول میانی

DMU	استان	x_1	x_2	z
1	اصفهان	442000.3533	930648	3077124
2	مرکزی	178595.1278	2046563	7179644
3	همدان	200399.9967	1594090	5893597
4	تهران	1297751.106	1345452	3276479
5	خوزستان	527051.3889	3483133	11356690
6	سیستان و بلوچستان	348034.62	1555804	4347940
7	کرمانشاه	171848.87	1252673	4703446
8	کرمان	389938.6778	2201962	9612356
9	گیلان	343938.6778	483317	1385771
10	مازندران	473743.9056	2490833	9194716
11	آذربایجان شرقی	364779.7956	1211636	3836406
12	آذربایجان غربی	418147.5133	58138	123326
13	لرستان	252201.6189	52252	98510
14	خراسان جنوبی	124203.4244	929821	2834984
15	سمنان	95953.47	329113	1007460
16	بوشهر	111795.1289	318228	665984

17	فارس	481514.1489	149934	347915
18	هرمزگان	241178.7156	3534145	11430536
19	یزد	214494.8567	949898	4149791
20	قزوین	138177.8156	2999508	11431938
21	خراسان شمالی	107157.0767	1165626	4497149
مجموع		6922906.289	29082774	100451762
میانگین		329662.2042	1384894	4783417.238

جدول ۳. مقادیر اولیه خروجی های مطلوب و نامطلوب و کارایی حاصل از مدل (۳)

وضعیت کارایی	y_2	y_1	w	استان	DMU
1.1877	91000	16486.281	83881.32	اصفهان	1
3.8111	29127	5007	184313.67	مرکزی	2
5.7111	19368	3353	143591.1	همدان	3
1.0000	13029	35743.662	121213.68	تهران	4
1.0879	57945	25038.224	313604.97	خوزستان	5
1.0000	187502	6074	140145.36	سیستان و بلوچستان	6
5.1180	25009	3164	112863.57	کرمانشاه	7
1.6264	91193	7832	198299.58	کرمان	8
4.5278	14044	5368	43621.53	گیلان	9
3.0954	23756	8223.477	224297.97	مازندران	10
3.6008	40722	3617	109170.24	آذربایجان شرقی	11
1.0135	37412	5161	5355.42	آذربایجان غربی	12
1.0000	28306	4897.293	4825.68	لرستان	13
1.1401	150800	1607	83806.89	خراسان جنوبی	14
1.1957	97491	2714	29743.17	سمنان	15
2.9965	23168	6304	28763.52	بوشهر	16
1.0108	102568	14113.645	13617.06	فارس	17
1.7820	70607	9295	318196.05	هرمزگان	18
2.0945	73873	5561	85613.82	یزد	19
5.2376	15627	4590	270078.72	قزوین	20
6.2297	28434	1258	105029.34	خراسان شمالی	21

مجموع	2620032.66	175407.582	1220981	
میانگین	124763.46	8325.742	58141.95238	2.6413

با توجه به اینکه مطالعه و محاسبه‌ی بهره‌وری حاشیه‌ای بر روی نقاط مرزی صورت می‌گیرد لذا ابتدا تصاویر واحدهای ناکارای ارزیابی شده توسط مدل (۳) را به دست آورده و سپس محاسبات موردنیاز بر روی این نقاط صورت می‌گیرد. شاخص‌های ورودی و خروجی مربوط به هر واحد تصمیم‌گیری به ترتیب در جداول (۴) و (۵) آورده شده است.

جدول ۴. نقاط تصویر مقادیر ورودی و محصول میانی

DMU	x_1	x_2	z
1	326961.8964	930648.0000	3860187.4972
2	173773.940	2046563.0000	6592774.5542
3	153271.6483	1594090.0000	5121288.3204
4	142005.4535	1345452.0000	4312693.3452
5	41340.2083	3483133.0000	11264514.4392
6	247441.7057	1555804.0000	4991908.6071
7	110556.8214	1252673.0000	4612780.8988
8	125567.0004	2201962.0000	8318540.6446
9	234094.1852	483317.0000	2044004.5984
10	244481.6107	2490833.0000	8035015.6006
11	207347.2278	1211636.0000	4556824.8150
12	251954.3700	58138.0000	125074.8596
13	252201.6189	52252.0000	98510.0000
14	124203.4244	929821.0000	3614729.6135
15	95953.4700	329113.0000	1007460.0000
16	111795.1289	318228.0000	994564.9754
17	248098.3622	149934.0000	539371.1308
18	241178.7156	3534145.0000	11430536.0000
19	214494.8567	949898.0000	4149791.0000
20	138177.8156	2999508.0000	11431938.0000
21	107157.0767	1165626	4497149.0000

مجموع	3792056.537	290827774	101599657.9000
میانگین	180574.1208	1384894	4838078.9476

جدول ۵. نقاط تصویر خروجی‌های مطلوب و نامطلوب و کارایی حاصل از مدل (۳)

وضعیت کارایی	y_2	y_1	w	DMU
1	108078.0710	19580.2796	83881.3200	1
1	111006.5358	19082.2853	184313.6700	2
1	110612.4671	19149.2979	143591.1000	3
1	13029.0000	35743.6620	121213.6800	4
1	63038.9203	27239.3236	313604.9700	5
1	187502.0000	6074.0000	140145.3600	6
1	127995.4313	16193.2722	112863.5700	7
1	148315.0565	12737.8584	198299.5800	8
1	63588.6328	24305.3105	43621.5300	9
1	73533.5436	25454.6811	224297.9700	10
1	146631.8220	13024.0975	109170.2400	11
1	37918.8300	5230.9174	5355.4200	12
1	28306.0000	4897.2930	4825.6800	13
1	171933.4746	7547.6786	83806.8900	14
1	116572.3612	12788.0264	29743.1700	15
1	82797.0842	18889.7230	28763.5200	16
1	103673.0303	14265.7003	13617.0600	17
1	125819.1424	16563.3567	318196.0500	18
1	154726.8915	11647.5064	85613.8200	19
1	81848.4126	24040.7125	270078.7200	20
1	177134.9532	7836.9477	105029.3400	21
مجموع	4468123.321	342291.9301	2620032.66	
میانگین	106383.8886	16299.6157	124763.46	

همانطور که از آخرین سطر جدول‌های (۲) تا (۵) مشخص است به طور متوسط برای بهبود در سطح عملکرد نیروگاه‌ها و بهبود کارایی، لازم است ورودی اول ۴۶ درصد کاهش یافته و ورودی دوم و خروجی نامطلوب بدون تغییر باقی بمانند. همچنین لازم است محصول میانی و خروجی‌های اول و دوم به ترتیب ۱ درصد، ۹۵ درصد و ۸۲ درصد افزایش داشته باشند. همان طور که در بخش‌های قبل هم ذکر شد، در یک فرآیند تولید دو مرحله‌ای هرگونه تغییری در مؤلفه‌ی اول می‌تواند از طریق محصول میانی به مؤلفه‌ی دوم انتقال یابد. در این مطالعه هدف سنجش میزان اثر تغییرات "انواع سوخت" بر روی درآمد کل نیروگاه‌های برق می‌باشد. برای این منظور ابتدا شاخص "انواع سوخت" را به اندازه‌ی کوچک h نمو داده و تأثیر این تغییر با استفاده از مدل (۱۱) بر روی شاخص میانی یعنی "جریان الکتریسته" سنجیده می‌شود. سپس با حل مدل (۱۴) اثر تغییر این فاکتور بر روی درآمد کل به دست می‌آید. مقدار عددی بهره‌وری حاشیه‌ای در هر دو مرحله محاسبه می‌شود. مثبت بودن عدد به دست آمده به معنای ارتباط مستقیم و منفی بودن این عدد به مفهوم معکوس بودن ارتباط بین دو متغیر مورد مطالعه است. علت این امر که در این مطالعه از واژه بهره‌وری حاشیه‌ای استفاده نمودیم این است که چه مادامی که در صدد سنجیدن اثر تغییر شاخص انواع سوخت در مؤلفه‌ی اول بر شاخص میانی "جریان الکتریسته" هستیم جنس دو شاخص متفاوت و از نوع ورودی و خروجی هستند و چه زمانی که اثر این تغییر را بر روی "درآمد کل" می‌سنجیم این بار "جریان الکتریسته" حکم ورودی و "درآمد کل" در حکم خروجی ایفا می‌نکند لذا با توجه به توضیحاتی که در بخش قبل آورده شده از بهره‌وری حاشیه‌ای استفاده می‌کنیم.

برای محاسبه بهره‌وری حاشیه‌ای بر طبق فرآیند مطرح شده در بخش قبل، در مؤلفه‌ی اول از ساختار دو مرحله‌ای شکل (۳)، ابتدا در گام اول نمونه‌هایی کوچک به ترتیب $h = +500$ و $h = +1000$ ، $h = +5000$ در انواع سوخت هر واحد تصمیم گیرنده ایجاد کرده و سپس در گام دوم تأثیر این تغییر توسط مدل (۱۱) بر روی محصور میانی یعنی "جریان الکتریسته" سنجیده می‌شود. در گام سوم میزان عددی بهره‌وری حاشیه‌ای، $MP^+(x_0, z_0, w_0, y_0)$ ، با استفاده از رابطه‌ی (۱۲) محاسبه می‌شود. نتایج حاصل در جدول (۶) آورده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در ستون‌های دوم، چهارم و ششم به ترتیب میزان تغییرات "جریان الکتریسته" در ازای نمونه‌های ایجاد شده در "انواع

سوخت" هر واحد آورده شده است. در ستون‌های سوم، پنجم و هفتم به ترتیب میزان عددی بهره‌وری حاشیه‌ای حاصل از این تغییرات قابل مشاهده است. می‌توان گام‌های ذکر شده در این فرآیند را با نمودارهای کاهشی مجدداً انجام داد و میزان $MP^-(x_0, z_0, w_0, y_0)$ را به دست آورد.

به عنوان مثال اولین نیروگاه برق را در نظر می‌گیریم. در اولین مؤلفه از فرآیند دو مرحله‌ای اگر "انواع سوخت" را به اندازه‌ی ۵۰۰ واحد افزایش دهیم، جریان الکتریسته از ۳۸۶۰۱۸۷/۴۹۷۲ به ۴۰۶۴۲۴۹/۳۶۰ افزایش می‌یابد. بهره‌وری حاشیه‌ای حاصل ۴۰۸/۱۲۴+ می‌باشد و به معنای آن است که برای کارا باقی ماندن DMU_1 با افزایش "انواع سوخت" به اندازه‌ی ۵۰۰ واحد لازم است جریان الکتریسته ۲۰۴۰۶۱/۸۶۲۴ واحد افزایش یابد و همچنین علامت مثبت آن به این معناست که ارتباط این دو فاکتور باهم ارتباطی مستقیم می‌باشد و افزایش یکی افزایش دیگری را در پی خواهد داشت.

اگر DMU_8 را در نظر بگیریم، در دومین مؤلفه از فرآیند دو مرحله‌ای، اگر شاخص "انواع سوخت" را به اندازه‌ی ۵۰۰ واحد افزایش دهیم، لازم است محصول میانی یا همان "جریان الکتریسته" به اندازه‌ی ۲۷۹۷۶۲/۰۷۳ واحد افزایش یابد تا این نیروگاه از نظر عملکرد همچنان کارار باقی بماند. همچنین همانطور که از جدول (۶) مشاهده می‌شود در همین نیروگاه اگر "انواع سوخت" را به ترتیب ۱۰۰۰، ۵۰۰۰ واحد افزایش دهیم لازم است برای حفظ سطح عملکرد و کارا باقی ماندن هشتمین نیروگاه برق، "جریان الکتریسته" به ترتیب به میزان ۲۷۹۷۶۲/۰۷۳+ واحد افزایش یابد. مقادیر به دست آمده برای بهره‌وری حاشیه‌ای حاصل از این تغییرات در این واحد تماماً اعداد مثبتی هستند و این به آن معناست که اگر "انواع سوخت" اندکی افزایش یابد و قرار باشد این واحد با عملکرد کارا باقی بماند، ناگزیر باید در شاخص "جریان الکتریسته" افزایشی رخ دهد.

جدول ۶. نتایج حاصل از حل مدل (۱۱) و بهره‌وری‌های حاشیه‌ای با نمودارهای مختلف

DMU	Z^* $h = 500$	MP_{500}^+	Z^* $h = 1000$	MP_{1000}^+	Z^* $h = 5000$	MP_{5000}^+
1	4064249.360	408.124	4065587.357	205.399	4065814.921	41.125
2	8046178.966	2906.809	8046178.9664	1453.404	8046178.966	290.681
3	6438568.299	2634.560	6438568.2992	1317.280	6438568.299	263.456

4	5555171.718	2484.957	5555171.7185	1242.478	5555171.718	248.495
5	11430669.77	332.311	11430669.771	166.155	11430669.77	33.231
6	6302540.333	2621.263	6302540.3329	1310.632	6302540.333	262.126
7	5225533.243	1225.505	5225533.2426	612.752	5225533.243	122.550
8	8598302.718	559.524	8598302.7176	279.762	8598302.718	55.952
9	2045342.596	2.676	2046680.5930	2.676	2057384.571	2.676
10	9624644.844	3179.258	9624644.8441	1589.629	9624644.844	317.926
11	5079731.131	1045.813	5079731.1308	522.906	5079731.131	104.581
12	126412.857	2.676	127750.8542	2.676	138454.8328	2.676
13	99847.997	2.676	101185.9946	2.676	111889.9731	2.676
14	4060516.920	891.5746	4061854.9174	447.1253	4062207.221	89.495
15	1349384.79	683.8496	1350722.7930	343.2628	1361426.772	70.793
16	1300258.309	611.3867	1301596.3070	307.0313	1312300.285	63.547
17	540709.1281	2.6760	542047.1255	2.6760	552751.104	2.676
18	11430536.00	0	11430536.00	0	11430536.00	0
19	4149791.000	0	4149791.00	0	4149791.000	0
20	11431938.00	0	11431938.00	0	11431938.00	0
21	4916260.235	838.222	4916260.235	419.111	4916260.235	83.822

برای مطالعه‌ی اثر تغییر شاخص "جریان الکتریسته" بر روی درآمد کل در مؤلفه‌ی دوم از فرآیند تولید دو مرحله‌ای، ابتدا با استفاده از مدل (۱۴) میزان تغییر شاخص γ_1 به گونه‌ای سنجیده می‌شود که واحد تحت بررسی همچنان کارا باقی بماند، سپس بهره‌وری حاشیه‌ای با استفاده از رابطه‌ی (۱۵) به دست می‌آید. نتایج حاصل از اجرای این مرحله در جدول (۷) آورده شده است. همانطور که از این جدول مشخص است، ستون‌های دوم، چهارم و ششم به ترتیب مقدار بهینه‌ی حاصل از حل مدل (۱۴) و مقدار جدید درآمد کل، γ_1^* ، به ازای نمونه‌های $h = +5000$ ، $h = +1000$ ، $h = +500$ منتقل شده از تغییر اولین مؤلفه‌ی ورودی به محصول میانی می‌باشد. مقدار عددی بهره‌وری حاشیه‌ای حاصل از این تغییرات

در این مرحله و به دست آمده از رابطه‌ی (۱۵) به ترتیب در ستون‌های سوم، پنجم و هفتم آورده شده است.

برای نمونه DMU_2 ، DMU_5 و DMU_{12} را به ازای $h = +500$ در نظر می‌گیریم. همانطور که ملاحظه می‌شود در DMU_2 ، مقدار بهره‌وری حاشیه‌ای، MP_{500}^+ ، برابر صفر می‌باشد و به این معناست که این تغییر اثری بر روی اولین مؤلفه از بردار خروجی یعنی درآمد کل نداشته و مقدار $۱۹۰۸۲/۲۸۵۳$ حفظ شده است. بهره‌وری حاشیه‌ای صفر به معنای عدم تغییر در مقدار جدید مؤلفه‌ی مورد بررسی می‌باشد.

اگر DMU_5 را در نظر بگیریم ملاحظه می‌شود که مقدار عددی بهره‌وری حاشیه‌ای، MP_{500}^+ ، برابر با $-۰/۰۱۹۱$ است. علامت منفی بیانگر این است که رابطه‌ی بین افزایش "جریان الکتریسیته" و "درآمد کل" در این واحد تصمیم گیرنده یک رابطه‌ی معکوس می‌باشد. به این معنا که وقتی "جریان الکتریسیته" از $۱۱۲۶۴۵۱۴/۴۳۹۲$ به $۱۱۴۳۰۶۶۹/۷۷۰۸$ افزایش می‌یابد، "درآمد کل" به میزان $۳۱۷۴/۳۸۱۷$ واحد کاهش پیدا می‌کند.

برای نمونه‌ای دیگر DMU_{12} را در نظر می‌گیریم. همان طور که از جدول (۷) مشخص است، $MP_{500}^+ = +0/0230$ و این به آن معنی است که برای کارا باقی ماندن این واحد تحت بررسی افزایش "جریان الکتریسیته" از $۱۲۵۰۷۴/۸۵۹۶$ به $۲۵۹۵۸۲/۷۸۳۷$ منجر به افزایش "درآمد کل" از $۵۲۳۰/۷۴۹۱$ به $۵۲۶۹/۷۶۳۷$ خواهد شد.

جدول ۷. نتایج حاصل از حل مدل (۱۴) و بهره‌وری‌های حاشیه‌ای با نمونه‌های مختلف

DM U	y^* $h = 500$	MP_{500}^+	y^* $h = 1000$	MP_{1000}^+	y^* $h = 5000$	MP_{5000}^+
1	19580.2796	0	19580.2796	0	19580.2796	0
2	19082.2853	0	19082.2853	0	19082.2853	0
3	19149.2979	0	19149.2979	0	19149.2979	0
4	34223.7068	-0.0012	34223.7068	-0.0012	34223.7068	-0.0012

5	24064.9419	-0.0191	24064.9419	-0.0191	24064.9419	-0.0191
6	6074.0000	0	6074.0000	0	6074.0000	0
7	16193.2722	0	16193.2722	0	16193.2722	0
8	12737.8584	0	12737.8584	0	12737.8584	0
9	24307.1846	0.0014	24309.0587	0.0014	24324.0514	0.0014
10	25454.6811	0	25454.6811	0	25454.6811	0
11	13024.0975	0	13024.0975	0	13024.0975	0
12	5269.7637	0.0290	5308.6100	0.0290	5619.3805	0.0290
13	4925.7258	0.0212	4954.1585	0.0212	5181.6207	0.0212
14	8200.2987	0.0015	8202.2575	0.0015	8202.7732	0.0015
15	13417.4943	0.0018	13419.9575	0.0018	13439.6631	0.0018
16	19452.4905	0.0018	19454.9536	0.0018	19474.6592	0.0018
17	14268.1635	0.0018	14270.6267	0.0018	14290.3322	0.0018
18	16563.3567	0.0018	16563.3567	0.0018	16563.3567	0.0018
19	11647.5064	0.0018	11647.5064	0.0018	11647.5064	0.0018
20	24040.7125	0.0018	24040.7125	0.0018	24040.7125	0.0018
21	7836.9477	0	7836.9477	0	7836.9477	0

در جدول (۸) میزان بیشترین و کمترین میزان افزایش و کاهش با تغییرات صورت گرفته با طول گام های متفاوت بر روی شاخص میانی "جریان الکتریسته" آورده شده است. همانطور که ملاحظه می شود DMU_{10} با افزایش شاخص "انواع سوخت" به اندازه ی طول گام های مختلف h همواره بیشترین افزایش در میزان "جریان الکتریسته" را دارد و همواره میزان عدد بهره وری حاشیه ای مثبت می باشد و به این معناست که افزایش انواع سوخت برای این واحد منجر به بیشترین افزایش در میزان "جریان الکتریسته" تولیدی خواهد شد. از طرفی DMU_{18} و DMU_{19} و DMU_{20} با افزایش "انواع سوخت" به عنوان شاخص ورودی هیچ

گونه تغییری در خروجی مؤلفه‌ی اول فرآیند دو مرحله‌ای نداشته و از این رو بهره‌وری حاشیه‌ای آن نیز صفر می‌باشد.

جدول ۸. میزان بیشترین و کمترین افزایش و کاهش اثر تغییر "انواع سوخت" بر "جریان الکتریسیته"

$h=+500,1000,5000$	$Z^* - Z$	MP
$DMU_{Max}: DMU_{10}$	1589629.2435	$MP_{+500} = 0.0015$ $MP_{+1000} = 1589.6292$ $MP_{+5000} = 0.0015$
$DMU_{Min}: \begin{cases} DMU_{18} \\ DMU_{19} \\ DMU_{20} \end{cases}$	0 0 0	0 0 0

در جدول (۹) میزان بیشترین و کمترین افزایش و کاهش با تغییرات انتقال یافته از شاخص میانی "جریان الکتریسیته" که حاصل تغییر صورت گرفته از "انواع سوخت" می‌باشد با طول گام‌های متفاوت بر روی شاخص نهایی "درآمد کل" آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، DMU_{14} با افزایش "جریان الکتریسیته" به اندازه‌ی طول‌های گام مختلف h همواره بیشترین افزایش در میزان "درآمد کل" را دارد و همواره میزان عدد بهره‌وری حاشیه‌ای مثبت می‌باشد و به این معناست که افزایش "جریان الکتریسیته" برای این واحد منجر به بیشترین افزایش در میزان "درآمد کل" خواهد شد. از طرفی DMU_5 با افزایش "جریان الکتریسیته" به عنوان شاخص ورودی سبب کاهش در اولین خروجی مؤلفه‌ی دوم فرآیند دو مرحله‌ای شده و از این رو بهره‌وری حاشیه‌ای آن نیز منفی گردیده است.

جدول ۹. میزان بیشترین و کمترین افزایش و کاهش اثر تغییر "جریان الکتریسیته" بر "درآمد کل"

$h=+500,1000,5000$	$y^* - y$	MP
$DMU_{Max}: DMU_{14}$	652.6201	$MP_{+500} = 0.0015$
	652.5789	$MP_{+1000} = 0.0015$
	655.0946	$MP_{+5000} = 0.0015$
$DMU_{Min}: DMU_5$	-3174.3817	$MP_{+500} = -0.0191$
		$MP_{+1000} = -0.0191$
		$MP_{+5000} = -0.0191$

نتیجه گیری و پیشنهادات

در تئوری تولید، مطالعه اثر یک شاخص بر یک یا چند شاخص دیگر مادامی که با فرآیندهای چند مرحله‌ای مواجه هستیم از اهمیت بسزایی برخوردار است. این گونه مبادلات در اقتصاد تحت عنوان نرخ‌های حاشیه‌ای و بهره‌وری حاشیه‌ای شناخته می‌شوند. در این مقاله با تمرکز بر روی ۲۱ نیروگاه برق استانی که دارای ساختار شبکه دو مرحله‌ای هستند و با حضور خروجی‌های نامطلوب، برای اولین بار طی یک فرایند چهار مرحله‌ای به مطالعه روی اثر تغییرات شاخص‌های ورودی بر روی شاخص میانی و سپس اثر آن بر روی محصولات نهایی پرداخته شده است. بر طبق این مطالعه هر گونه افزایش یا کاهش در ورودی‌های مولفه اول از شبکه دو مرحله‌ای می‌تواند از طریق تغییرات شاخص میانی به محصول نهایی منتقل گردد، لذا می‌توان با تغییرات ورودی‌های مولفه اول و با حفظ کارایی خروجی‌های نهایی کل سیستم را مدیریت نمود. اگر مقدار عددی بهره‌وری حاشیه‌ای مثبت باشد، به معنای رابطه‌ی مستقیم از منظر افزایش یا کاهش در شاخص‌های مورد نظر است، در غیر این صورت چنانچه این عدد منفی باشد، به معنی ارتباط معکوس بین افزایش یا کاهش شاخص‌ها می‌باشد. همچنین همانطور که در جداول (۸) و (۹) مشاهده شد در مؤلفه‌ی اول از فرآیند دو مرحله‌ای بیشترین افزایش در واحد دهم رخ داده و به این معناست که با افزایش "انواع سوخت" برای اینکه این واحد همچنان کارا باقی بماند ناچار است "جریان الکتریسیته" را

افزایش دهد و کمترین کاهش در واحدهای ۱۸، ۱۹ و ۲۰ رخ داده که همانطور که ملاحظه می‌گردد صفر می‌باشد و به این معناست که با افزایش "انواع سوخت" برای کارا باقی ماندن این واحدها هیچ گونه تغییری لازم نیست. همچنین در مؤلفه‌ی دوم از فرآیند تولید با افزایش میزان "جریان الکتریسیته" واحد های ۵ و ۱۴ به ترتیب بیشترین کاهش و بیشترین افزایش در درآمد کل به منظور حفظ کارایی را داشته‌اند. به منظور ارائه پیشنهاداتی برای مطالعات آتی توصیه می‌شود شبکه‌هایی با مؤلفه‌های بیشتر و تلفیقی از حالت‌های سری و موازی مورد مطالعه قرار گیرد و همچنین می‌توان برای محاسبه بهره‌وری حاشیه‌ای، تاثیر تغییرات گروهی از شاخص‌ها را بر روی گروهی دیگر از شاخص‌ها در نظر گرفت.

تعارض منافع

تعارض منافع ندارم.

ORCID

Maryam Sharifi



<https://orcid.org/0009-0001-2033-4214>

Sohrab Kordrostami



<https://orcid.org/0000-0003-0081-8008>

Leila Khoshandam



<https://orcid.org/0000-0003-0898-6647>

منابع

۱. امانی، ناصر و باقرزاده ولعی، هادی. (۱۳۹۷). ارزیابی کارایی شرکتهای برق منطقه ای ایران با تحلیل پوششی داده های شبکه ای: بر اساس تبدیل ساختارها به یک ساختار یکنواخت تصمیم گیری و تحقیق در عملیات، ۳(۳)، ۲۴۹-۲۸۰.
۲. پورعلیزاده، مژگان، امیر تیموری، علیرضا، و واعظ قاسمی، محسن. (۱۴۰۰). یک مدل DEA برای ارزیابی اجرای زنجیره تأمین پایدار با حضور خروجی های نامطلوب و شاخص های دو نقش ورودی و خروجی: کاربردی از صنعت برق. مطالعات مدیریت صنعتی، ۱۹(۶۲)، ۱۳۹-۱۹۲.
۳. خسروی، محمدرضا، شاهرودی، کامبیز، امیر تیموری، علیرضا، و دل افروز، نرگس. (۱۴۰۱). طراحی مدل تحلیلی - ریاضی به منظور سنجش کارایی زنجیره تولید، انتقال و توزیع صنعت برق ایران:

- رویکرد تحلیل پوششی داده های شبکه ای با خروجی نامطلوب. مدیریت صنعتی، ۱۴(۲)، ۲۲۰-۲۴۹.
۴. فلاحی، محمدعلی واحمدی، وحیده. (۱۳۸۴). ارزیابی کارایی شرکتهای توزیع برق در ایران. تحقیقات اقتصادی، ۷۱، ۲۹۷-۳۲۰.

References

5. Amirteimoori, A., Despotis, D., Kordrostami, S., Azizi, H. (2016). Additive models for network data Envelopment analysis in the presence of shared resources. *Transportation Research part D: Transport and Environment*, 48, 411-424.
<https://doi.org/10.1016/j.trd.2015.12.016>
6. Amirteimoori, A., Kordrostami, S., & Sarparast, M. (2006). Modeling undesirable factors in data envelopment analysis. *Applied Mathematics Computation*, 180(2), 444-452.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.12.029>
7. Amirteimoori, A., Charles, V., Mehdizadeh, S. (2024). Stochastic data envelopment analysis in the presence of undesirable outputs: An application to the power industry. *OR Spectrum*.
<https://doi.org/10.1007/s00291-024-00794-8>
8. Amirteimoori, A., Kou, G. (2024). Technical efficiency and managerial ability in two-stage production processes with undesirable products: A case on Asian banks. *Socio-Economic Planning Sciences* (96), 102081.
<https://doi.org/10.1016/j.seps.2024.102081>
9. An, Y., Zhai, X., (2020). SVR-DEA model of carbon tax pricing for China's thermal power industry. *Science of The Total Environment* 734, 139438.
<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.139438>
10. An, Q., Chen, s., Wang, P. (2025). Fixed-sum data envelopment analysis efficiency evaluation with network parallel structure under decentralized and centralized scenarios. *Expert Systems with Applications*.
<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.125904>
11. Asmild, M., Paradi, J. C., & Reese, D. N. (2006). Theoretical perspectives of trade-off analysis using DEA. *Omega*, 34(4), 337-343.
<https://doi.org/10.1016/j.omega.2004.11.002>
12. Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science* 30, 1078-1092.
<https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
13. Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978. "Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
14. Cooper, W.W., Park, K.S., Ciurana, JTP. (2000). Marginal rates and elasticities of substitution with additive models in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 13:105-23.

- <https://doi.org/10.1023/A:1007896629828>
15. Dar, K. H., & Raina, S. H. (2024). Public healthcare efficiency in India: Estimates and determinants using two stage DEA approach. *Evaluation and Program Planning*, 106, 102472.
<https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2024.102472>
 16. Färe, R., Grosskopf, S. (2009). "A Comment on weak disposability in nonparametric production analysis". *American Journal of Agricultural Economics*, 91, 535-8.
<https://doi.org/10.1111/j.1467-8276.2008.01237.x>
 17. Färe, R., Grosskopf, S. (2003). Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: Comment. *American Journal of Agricultural Economics*, 85, 1070-1074.
<https://www.jstor.org/stable/1244786>
<https://doi.org/10.1111/1467-8276.00510>
 18. Faozen, F., Sandy, S. R. O. (2024). Performance management: A new approach in performance management. In Human Resource Management-An Update. *IntechOpen*.
<https://doi.org/10.5772/intechopen.1002501>
 19. Farrell, M.J. (1957), The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 120, 253-290.
<https://doi.org/10.2307/2343100>
 20. Fukuyama, H., Weber, W. L., (2010). A slacks-based inefficiency measure for a two-stage system with bad outputs. *Omega*, 38, 398–409.
<https://doi.org/10.1016/j.omega.2009.10.006>
 21. Gao, X., Ye, Y., Su, W., Chen, L., (2023). Assessing the comprehensive importance of power grid nodes based on DEA. *International journal of critical infrastructure protection* 42, 100614.
<https://doi.org/10.1016/j.ijcip.2023.100614>
 22. Hailu, A., & Veeman TS. (2001). Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: An application to the Canadian pulp and paper industry. *American Journal of Agricultural Economics*, 83(3), 605-616.
<https://doi.org/10.1111/0002-9092.00181>
 23. Hadi, A., Amirteimoori, A., Kordrostami, S., Mehrabian, S. (2024). An efficiency score unification method in data envelopment analysis using slack-based models with application in banking. *Decision Analytic Journal*, (14), 100541.
<https://doi.org/10.1016/j.dajour.2024.100541>
 24. Huang, Z., Li, S.X., Rousseau, J.J. (1997). Determining rates of change in data envelopment analysis. *Journal of the operational Research Society* 48, 591-593.
<https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600393>
 25. Jahani Sayyad Noveiri, M., Kordrostami, S. (2024). Efficiency Appraisal and Classification of Flexible Random Factors. In Analytical Decision Making and Data Envelopment Analysis: Advances and Challenges. *Springer Nature Singapore*, pp. 103-123.

- <https://doi.org/10.1007/978-981-97-6972-8-5>
26. Jahanshahloo, G., Hadi Vencheh, A., Foroughi, A., & Kazemi Matin, R. (2004). Inputs/outputs estimation in DEA when some factors are undesirable. *Applied Mathematics and Computation*, 156(1), 19-32.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00814-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00814-2)
 27. Kao, C. (2009). Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model. *European Journal of Operational Research*, 192, 949-962.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.10.008>
 28. Kao, Ch. (2014). Network data envelopment analysis: A review. *European Journal of Operational Research*, 239, 1-16.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.02.039>
 29. Kao, C., Hwang, S-N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185(1), 418-429.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.11.041>
 30. Kao, Ch. (2024). Maximum slacks-based measure of efficiency in network data envelopment analysis: A case of garment manufacturing, *Omega*.
<https://doi.org/10.1016/j.omega.2023.102989>
 31. Khoshandam, L., Amirteimoori, A., Kazemi Matin, R., 2014. Marginal rates of Substitution in the Presence of non-discretionary factors: A data envelopment analysis approach. *Measurement*, 58,409-415.
<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2014.09.019>
 32. Khoshandam, L., Kazemi Matin, R., & Amirteimoori, A. (2015). Marginal rates of substitution in data envelopment analysis with undesirable outputs: A directional approach. *Measurement*, 68, 49-57.
<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.02.020>
 33. Kordrostami, S., Amirteimoori, A. (2005). Undesirable factors in multi-component performance measurement. *Applied Mathematics and Computation*, 171,721-729.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.01.081>
 34. Kuosmanen, T., (2005). Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs. *American Journal of Agricultural Economics*, 87, 1077-1082.
<https://doi.org/10.1111/j.1467-8276.2005.00788.x>
 35. Li, L., Liu, J., Yang, J., Ma, X., Yu, H. (2024). Investigating the efficiency of container terminals through a network DEA cross efficiency approach. *Research in Transportation Business & Management Volume* 53, 101107.
<https://doi.org/10.1016/j.rtbm.2024.101107>
 36. Liu, Y., Mai, L., Huang, F., Zeng, Z. (2024). Regional healthcare resource allocation and decision-making: Evaluating the effectiveness of the three-stage super-efficiency DEA model. *Hilyon*, Volume 10, Issue 23e40312.
<https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e40312>

37. Lozano, S., Gutiérrez, E., & Moreno, P. (2013). Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs. *Applied Mathematical Modelling*, 37(4), 1665-1676.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.041>
38. Maghbouli, M., Amirteimoori, A., & Kordrostami, S. (2014). Two-stage network structures with undesirable outputs: A DEA based approach. *Measurement*, 48, 109-118.
<https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.10.032>
39. Mahboubi, M., Kordrostami, S., Amirteimoori, A., Chane kanafi, A. (2021). Estimating Marginal Rate of Substitution in two-stage processes with undesirable factors. *Iranian Journal of Management Studies (IJMS)*, 14(2): 419-436.
[10.22059/ijms.2020.298251.673968](https://doi.org/10.22059/ijms.2020.298251.673968)
40. Meng, M., Pang, T., Li, X., (2023). Assessing the total factor productivity of China's thermal power industry using a network DEA approach with cross-efficiency. *Energy Reports Pages* 5196-5205.
<https://doi.org/10.1016/j.egyr.2023.04.050>
41. Omrani, H., Yang, Z., Karbasian, A., Teplova, T., (2023). Combination of top-down and bottom-up DEA models using PCA: A two-stage network DEA with shared input and undesirable output for evaluation of the road transport sector. *Socio-Economic Planning Sciences* 89, 101706.
<https://doi.org/10.1016/j.seps.2023.101706>
42. Rosen, D., Schaffnit, C., Paradi, J.C. (1998). Marginal rates and two-dimensional level curves in DEA. *Journal of Productivity Analysis*. 9:205-32.
<https://doi.org/10.1023/A:1018382904489>
43. Seiford, L.M., & Zhu, J. (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142(1), 16-20.
[https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00293-4](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00293-4)
44. Shephard, R.W. 1970. Theory of cost Production Function. Princeton University Press.
45. Shi, X., Emrouznejad, A., Yu, w. (2021). Overall efficiency of operational process with undesirable outputs containing both series and parallel processes: A SBM network DEA model. *Expert Systems with Applications* 178, 115062.
<https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115062>
46. Sueyoshi, T., Goto, M. (2012). Returns to Scale, damages to Scale, marginal rate of transformation and rate of Substitution in DEA environmental assessment. *Energy Econ* 34,905-917.
<https://doi.org/10.1016/j.eneco.2012.04.003>
47. Wei, X., Zhao, R., (2024). Evaluation and spatial convergence of carbon emission reduction efficiency in China's power industry: Based on a three-stage DEA model with game cross-efficiency. *Science of The Total Environment* 906, 167851.
<https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2023.167851>

48. Yang, Z., Omrani, H., Imanira, R. (2024). Assessing airline efficiency with a network DEA model: A Z-number approach with shared resources, undesirable outputs, and negative data. *Socio-Economic Planning Sciences*.
<https://doi.org/10.1016/j.seps.2024.102044>
49. Yeh, L.T. (2025). Measuring the effects of sediment variation and evaporation loss on the overall operational efficiency of hydropower systems: A robust network data envelopment analysis model, *Renewable Energy*.
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2025.122488>
50. Zhang, Ch., Wang, Z., Su, W., Dalia, S., (2024). Differentiated power rationing or seasonal power price? Optimal power allocation solution for Chinese industrial enterprises based on the CSW-DEA model. *Applied Energy* 353, 122150.
<https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2023.122150>

References [In Persian]

1. Amani, N., & Bagherzadeh valami, H. (2018). Efficiency Evaluation of regional electronic companies in Iran by Network DEA: A based on the Conversion of the Structures into a uniform structure. *Journal of Decisions and Operations Research*, 3(3), 249-280. [In Persian]
2. Pouralizadeh, M., Amirteimoori, A., & vaez-ghasemi, M. (2021). A DEA model for performance evaluation supply chain sustainability in the presence undesirable outputs and dual role factors: A Case on power industry. *Industrial Management Studies*, 19(62), 139-192. [In Persian]
3. Khosravi, M. R., Shahroodi, K., Amirteimoori, A., & Delafrooz, N. (2022). Developing an Analytical-Mathematical Model for Evaluating the Efficiency of the Power Production, Transmission, and Distribution Companies in the Electric Power Industry of Iran: An Network Data Envelopment Analysis (NDEA) Approach with Undesirable Outputs. *Industrial Management Journal*, 14(2), 220-249. [In Persian]
4. Falahi M., & Ahmadi V. (2006). Evaluating the efficiency of electricity distribution company in Iran. *Journal of economic research*, (71), 297-320. [In Persian]