

فصلنامه علمی - پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال دهم، شماره ۲۶، پاییز ۹۱
صفحات ۲۷ تا ۴۶

تصمیم‌گیری گروهی بر پایه یک روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای جدید

عماد روغنیان*

فاطمه مجیبیان**

چکیده

در این مقاله یک روش تاپسیس جدید مبتنی بر اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای تصمیم‌گیری گروهی معرفی می‌گردد که در آن، ارزش گذاری گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها و ارزش‌های وزنی شاخص‌ها با استفاده از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای تعیین می‌گردد و اوزان نظرات تصمیم‌گیرندگان نیز نامعلوم هستند. در روش پیشنهادی، برای تعیین ارزش‌های وزنی شاخص‌ها و نظرات تصمیم‌گیرندگان از ارزش‌های مورد انتظار و عملگر میانگین وزنی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای استفاده شده، و سپس الگوریتمی برای رتبه‌بندی گزینه‌ها در محیط فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می‌گردد. در پایان، با استفاده از یک مثال عددی، کارایی روش پیشنهادی جدید مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: تاپسیس، اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای، تصمیم‌گیری گروهی، عملگر میانگین وزنی.

* عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه خواجه نصیر طوسی

** کارشناس ارشد رشته مدیریت صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی - تهران - ایران (نویسنده مسئول): Fatemeh.mojibian@gmail.com

تاریخ پذیرش: ۹۱/۷/۱۵

تاریخ دریافت: ۹۱/۳/۴

مقدمه

رویکرد تصمیم‌گیری‌های چند معیاره^۱ (MCDM) بخش اصلی علم تصمیم‌گیری مدرن و پژوهش عملیاتی محسوب می‌شود. به دلیل پیچیدگی محیط اجتماعی - اقتصادی، تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره^۲ (MCGDM) به یک رویکرد مهم در حل این پیچیدگی تبدیل شده است. روش اولویت بندی بر اساس نزدیکی به راه حل ایده‌آل^۳ (TOPSIS)، ارائه شده توسط هوانگ و یون^۴ [۱۵] روشی معروف برای مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره می‌باشد. در این روش، راه حل ایده‌آل مثبت^۵ (PIS) و راه حل ایده‌آل منفی^۶ (NIS) در نظر گرفته شده و مقدار فاصله گزینه‌ها از آنها تعیین می‌گردد. ایده اصلی این روش آن است که گزینه انتخابی باید دارای بیشترین فاصله از NIS و کمترین فاصله از PIS باشد. در روش تاپسیس، داده‌های ماتریس تصمیم‌گیری اعداد قطعی هستند، درحالی که در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره در دنیای واقعی، اطلاعات در دسترس تصمیم‌گیرندگان همواره مبهم و غیر دقیق می‌باشند. از آنجایی که بیان اولویت‌های گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها با مقادیر قطعی، غیر منطقی می‌باشد، روش تاپسیس کلاسیک برای این مطالعه مفید نمی‌باشد. بنابراین، در مقایسه با مسائل MCDM کلاسیک، مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره بسیار پیچیده‌تر هستند به طوری که شامل اولویت‌ها و قضاوت‌های ذهنی تصمیم‌گیرندگان مختلف می‌باشند، که اغلب هم مبهم و نادقیق می‌باشند [۲۵]. بنابراین، ضروری است که برخی از ابزارهای ریاضی منطقی برای مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره در شرایط عدم قطعیت فراهم گردند.

از آنجایی که تئوری مجموعه‌های فازی ارائه شده توسط زاده^۷ [۳۳] می‌تواند شرایط مبهم و نادقیق را به کارگیرد، بسیاری از تحقیقات، روش تاپسیس را در محیط فازی توسعه دادند [۳،۵،۷،۹،۱۱،۱۲،۱۶،۱۷،۱۸،۲۱،۲۲،۲۵،۲۸،۲۹]. به دلیل پیچیدگی محیط اجتماعی - اقتصادی، در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری کاربردی، امتیازهای

1- Multiple Criteria Decision Making
 2- Multi-criteria Group Decision making
 3- Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution
 4- Hwang and Yoon
 5- Positive Ideal Solution
 6- Negative Ideal Solution
 7- Zadeh

بیان شده به وسیله تصمیم‌گیرندگان برای گزینه‌ها معمولاً نادقیق است به طوریکه ممکن است تردیدی درباره آنها وجود داشته باشد. از طرفی مجموعه‌های فازی شهودی ارائه شده توسط آتاناسو^۱ [۴] ابزاری مناسب برای توصیف اطلاعات مبهم و نادقیق تصمیم و مواجهه با عدم قطعیت و ابهام موجود در فرآیند تصمیم‌گیری می‌باشند [۳۰]. از این رو، برخی از محققان روش تاپسیس توسعه یافته با مجموعه‌های فازی شهودی برای مسائل MCDM را مورد ارزیابی قرار دادند [۶،۲۰،۲۳،۳۱]. اعداد فازی شکل خاصی از مجموعه‌های فازی هستند و برای مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه فازی دارای اهمیت هستند [۱،۲،۱۳،۲۶]. نهی و ملکی^۲ [۱۹] اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای را به عنوان توسعه یافته اعداد فازی شهودی مثلثی معرفی کرده و برخی عملیات ریاضی را برای آنها به اثبات رسانیدند. اعداد فازی شهودی مثلثی و ذوزنقه‌ای، توسعه یافته مجموعه‌های فازی شهودی هستند که مجموعه گسسته را به مجموعه پیوسته تعمیم می‌دهند.

به این ترتیب هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش تاپسیس توسعه یافته جدید با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای توسط گروهی از تصمیم‌گیرندگان می‌باشد. در روش پیشنهادی، امتیاز یک گزینه نسبت به شاخص‌ها و ارزش‌های وزنی شاخص‌ها از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای شکل می‌گیرند و اوزان هر یک از تصمیم‌گیرندگان نیز نامشخص است. مسئله MCGDM پیشنهادی بر پایه روش تاپسیس فازی ذوزنقه‌ای می‌تواند به گروهی از تصمیم‌گیرندگان در تصمیم‌گیری در محیط غیر قطعی کمک نماید.

ادامه مقاله به این صورت سازماندهی شده است که در بخش ۲، ابتدا برخی از تعاریف اولیه اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می‌شود. در بخش ۳، مسئله MCGDM پیشنهادی بر پایه روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای ارائه می‌گردد. در بخش ۴، یک مثال عددی برای بررسی نحوه عملکرد روش پیشنهادی ارائه می‌شود، و در بخش ۵ نتیجه‌گیری صورت می‌گیرد.

1- Atanassov

2- Nehi and Maleki

تعاریف

در این بخش برخی تعاریف اولیه از مجموعه‌های فازی شهودی [۴] و اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای [۱۹، ۱۴] ارائه می‌گردد.

تعریف ۱. اگر X یک مجموعه مرجع باشد، مجموعه فازی شهودی A به صورت زیر تعریف می‌گردد [۴]:

$$A = \{ \langle X, \mu_A(x), \nu_A(x) | x \in X \rangle \} \quad (۱)$$

به طوری که توابع $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ و $\nu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ به ترتیب درجه عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ می‌باشند، به نحوی که رابطه $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ برای تمامی $x \in X$ برقرار می‌باشد. مقدار $\pi_A = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$ درجه تردید X را نشان می‌دهد.

تعریف ۲. اگر A یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای با پارامترهای $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq b_3 \leq a_3 \leq b_4 \leq a_4$ باشد و به صورت $A = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی \mathcal{R} نشان داده شود، توابع درجه عضویت و عدم عضویت آن به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 < x \leq a_3 \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4} & a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & x > a_4 \end{cases} \quad (۲)$$

و

$$\nu_A(x) = \begin{cases} 1 & x < b_1 \\ \frac{x-b_1}{b_1-b_2} & b_1 \leq x \leq b_2 \\ 0 & b_2 < x \leq b_3 \\ \frac{x-b_3}{b_4-b_3} & b_3 < x \leq b_4 \\ 1 & x > b_4 \end{cases} \quad (۳)$$

تعریف ۳. اگر A_1 و A_2 دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای باشند.

$$A_1 = \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}) \rangle$$

$$A_2 = \langle (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}) \rangle$$

آن‌گاه

$$A_1 \oplus A_2 = \langle (a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22}, a_{13} + a_{23}, a_{14} + a_{24}), (b_{11} + b_{21}, b_{12} + b_{22}, b_{13} + b_{23}, b_{14} + b_{24}) \rangle \quad (۴)$$

$$\lambda A_1 = \langle (\lambda a_{11}, \lambda a_{12}, \lambda a_{13}, \lambda a_{14}), (\lambda b_{11}, \lambda b_{12}, \lambda b_{13}, \lambda b_{14}) \rangle \quad (۵)$$

مطابق قوانین عملیاتی تعریف ۶، وانگ و ژانگ^۱ [۲۷] عملگر میانگین وزنی را برای اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای توسعه داده و عملگر میانگین وزنی فازی شهودی دوزنقه‌ای را ارائه دادند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۴. اگر $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ مجموعه‌ای از اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای، و $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ برداری وزنی A_i باشد، آنگاه عملگر میانگین وزنی فازی شهودی دوزنقه‌ای^۲ (TrIFWA) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{TrIFWA}(A_1, A_2, \dots, A_n) = w_1 A_1 \oplus w_2 A_2 \oplus \dots \oplus w_n A_n \quad (۶)$$

حاصل جمع بدست آمده به وسیله عملگر TrIFWA نیز اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای می‌باشد. زمانی که $w_i = \frac{1}{n}$ برای تمامی $i = 1, 2, \dots, n$ باشد، آنگاه عملگر TrIFWA به عملگر میانگین حسابی فازی شهودی دوزنقه‌ای^۳ (TrIFA) ساده می‌شود:

$$\text{TrIFA}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \frac{1}{n} (w_1 A_1 \oplus w_2 A_2 \oplus \dots \oplus w_n A_n) \quad (۷)$$

یکی دیگر از مفاهیم اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای، ارزش‌های مورد انتظار آنها می‌باشد.

بنابر ایده یه^۴ [۳۲]، ارزش مورد انتظار عدد فازی شهودی دوزنقه‌ای $A = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle$ به وسیله رابطه زیر به دست می‌آید:

$$EV(A) = \frac{1}{8} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \quad (۸)$$

تعریف ۵. اگر A و B دو عدد فازی شهودی دوزنقه‌ای با نشانگر برش آلفا باشند، آنگاه فاصله بین A و B به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

1- Wang and Zhang
2- Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Weighted Averaging operator
3- Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy arithmetic Averaging operator
4- Ye

$$D(A, B) = \sqrt{1/4 \int_0^1 \left[(A_L^+(\alpha) - B_L^+(\alpha))^2 + (A_R^+(\alpha) - B_R^+(\alpha))^2 + (A_L^-(\alpha) - B_L^-(\alpha))^2 + (A_R^-(\alpha) - B_R^-(\alpha))^2 \right] d\alpha} \quad (9)$$

قضیه ۱. اگر $A_1 = \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}) \rangle$ و $A_2 = \langle (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}) \rangle$ دو عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای باشند، فاصله بین آنها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D(A_1, A_2) = \sqrt{\frac{1}{12} \left\{ \sum_{i=1}^4 (a_{2i} - a_{1i})^2 + \sum_{i=1}^4 (b_{2i} - b_{1i})^2 + \sum_{i \in \{1,3\}} (a_{2i} - a_{1i})(a_{2i'} - a_{1i'}) + \sum_{i \in \{1,3\}} (b_{2i} - b_{1i})(b_{2i'} - b_{1i'}) \right\}} \quad (10)$$

به طوریکه $i' = i + 1$ برای تمامی $i \in \{1,3\}$.

TOPSIS تعمیم یافته با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای مسائل MCGDM

در مسائل MCGDM، تصمیم گیرندگان ابتدا باید امتیاز گزینه‌ها را نسبت به شاخص‌ها مشخص کرده و بر پایه این ارزش‌های اولویت‌بندی شده، بهترین گزینه را انتخاب نمایند. به دلیل اطلاعات مبهم و نادقیق در دسترس تصمیم گیرندگان تحت شرایط نامعلوم، تصمیم گیرندگان قادر به ارزیابی دقیق گزینه‌ها نمی‌باشند. از این رو، متغیرهای کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای می‌توانند در تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری برای هر تصمیم گیرنده مورد استفاده قرار گیرند. فرآیند MCGDM، تصمیم گیرندگان بسیاری را شامل می‌شود که هر یک دارای دانش و تجربه متفاوتی هستند، و در نتیجه ممکن است آنها در برخی از زمینه‌ها نسبت به زمینه‌های دیگر خبره تر باشند.

حال از آنجایی که تعیین اوزان از قبل برای متخصصان منطقی نمی‌باشد، بنابراین در این بخش یک روش جدید تاپسیس توسعه یافته با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای حل مسائل MCGDM ارائه می‌گردد که در آن ارزش‌های اولییتی و ارزش‌های وزنی شاخص‌ها به وسیله تصمیم‌گیرندگان با استفاده از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای تعیین می‌گردند.

برای مسائل MCGDM، فرض می‌شود که $O = \{o_1, o_2, \dots, o_m\}$ مجموعه‌ای از گزینه‌ها، $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ شاخص‌های تصمیم، $D = \{d_1, d_2, \dots, d_l\}$ مجموعه‌ای از تصمیم‌گیرندگان، $R^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})_{m \times n}$ ماتریس تصمیم‌گیری تصمیم‌گیرنده k ام است که در آن $r_{ij}^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) یک عدد فازی شهودی ذوزنقه‌ای ایجاد شده توسط k تصمیم‌گیرنده برای گزینه o_i نسبت به شاخص c_j می‌باشد. با این توضیحات، تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای مسائل MCGDM به صورت زیر می‌باشد:

ابتدا باید اوزان تصمیم‌گیرندگان تعیین شوند. مطابق چن و یانگ^۱ [۱۰]، فرض می‌شود که $r_{ij}^{(k)} = \langle (a_{ij1}^k, a_{ij2}^k, a_{ij3}^k, a_{ij4}^k); (b_{ij1}^k, b_{ij2}^k, b_{ij3}^k, b_{ij4}^k) \rangle$ اولیتهای گزینه o_i در شاخص c_j ایجاد شده توسط تصمیم‌گیرنده k می‌باشد. سپس ارزش میانگین اولیتهای r'_{ij} از گزینه o_i در شاخص c_j می‌تواند به وسیله عملگر میانگین حسابی فازی شهودی ذوزنقه‌ای (TrIFA) در رابطه (۷) محاسبه گردد.

$$\begin{aligned} r'_{ij} &= TrIFA(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \dots, r_{ij}^{(l)}) = \frac{1}{l} (r_{ij}^{(1)} + r_{ij}^{(2)} + \dots + r_{ij}^{(l)}) \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l a_{ij1}^k, \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l a_{ij2}^k, \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l a_{ij3}^k, \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l a_{ij4}^k \right), \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{l} \sum_{k=1}^l b_{ij1}^k, \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l b_{ij2}^k, \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l b_{ij3}^k, \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l b_{ij4}^k \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

سپس می‌توان تشابه $r_{ij}^{(k)}$ و میانگین r'_{ij} را با استفاده از درجه تشابه به وسیله رابطه زیر تعریف گردد:

$$S(r_{ij}^{(k)}, r'_{ij}) = 1 - \frac{D(r_{ij}^{(k)}, r'_{ij})}{\sum_{k=1}^l D(r_{ij}^{(k)}, r'_{ij})} \quad (12)$$

به طوریکه $D(r_{ij}^{(k)}, r'_{ij})$ فاصله بین $r_{ij}^{(k)}$ و میانگین r'_{ij} می باشد که می تواند با استفاده از قضیه ۱ محاسبه گردد.

سپس وزن هر $r_{ij}^{(k)}$ می تواند به صورت زیر محاسبه گردد:

$$w_{ij}^{(k)} = \frac{s(r_{ij}^{(k)}, r'_{ij})}{\sum_{k=1}^l s(r_{ij}^{(k)}, r'_{ij})} \quad (13)$$

در مسائل MCGDM، باید نقطه نظرات تمام افراد گروه نهایتاً ادغام گردد. عملگر TrIFWA تعریف شده در تعریف ۴ می تواند برای ساختن ماتریس تصمیم فازی شهودی ذوزنقه‌ای تجمیعی $R = (r_{ij})_{m \times n}$ به صورت زیر استفاده گردد:

$$r_{ij} = \langle (a_{ij1}, a_{ij2}, a_{ij3}, a_{ij4}), (b_{ij1}, b_{ij2}, b_{ij3}, b_{ij4}) \rangle =$$

$$TrIFWA(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \dots, r_{ij}^{(l)}) = w_{ij}^{(1)} r_{ij}^{(1)} + w_{ij}^{(2)} r_{ij}^{(2)} + \dots + w_{ij}^{(l)} r_{ij}^{(l)} \quad (14)$$

مسئله مهم بعدی تعیین اوزان شاخص‌ها می باشد. به منظور تعیین اوزان شاخص‌ها، تصمیم گیرندگان نظر شخصی خود را برای تعیین اهمیت هر شاخص به وسیله اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بیان می کنند. اگر فرض شود $\xi_j^{(k)}$ بیانگر اهمیت شاخص j ام تعیین شده به وسیله تصمیم گیرنده k ام است، آن گاه ارزش وزنی شاخص j برای هر گزینه O_i ، که با $\xi_{ij}^{(k)}$ نشان داده می شود را می توان با استفاده از عملگر TrIFWA در تعریف ۴، به صورت زیر به دست آورد:

$$\xi_{ij} = \langle (p_{ij1}, p_{ij2}, p_{ij3}, p_{ij4}), (q_{ij1}, q_{ij2}, q_{ij3}, q_{ij4}) \rangle =$$

$$TrIFWA(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots, \xi_j^{(l)}) = w_{ij}^{(1)} \xi_j^{(1)} + w_{ij}^{(2)} \xi_j^{(2)} + \dots + w_{ij}^{(l)} \xi_j^{(l)} \quad (15)$$

ارزش وزنی مورد انتظار $EV(\xi_{ij})$ از اوزان فازی شهودی ذوزنقه‌ای از طریق رابطه (۸) به دست می آید. در نتیجه ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده ξ'_{ij} را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$\xi'_{ij} = \frac{EV(\xi_{ij})}{\sum_{j=1}^n EV(\xi_{ij})} \quad (16)$$

ایده اولیه تاپسیس این است که گزینه انتخاب شده می بایست نزدیک‌ترین به PIS و دورترین از NIS باشد. بنابراین PIS و NIS می بایست به صورت زیر تعیین گردند:

$$R^+ = (r_1^+, r_2^+, \dots, r_n^+) \quad (17)$$

$$R^- = (r_1^-, r_2^-, \dots, r_n^-) \quad (18)$$

زمانی که زامین شاخص، از نوع سود باشد آنگاه:

$$r_j^+ = \langle (\max_i a_{ij1}, \max_i a_{ij2}, \max_i a_{ij3}, \max_i a_{ij4}), (\max_i b_{ij1}, \max_i b_{ij2}, \max_i b_{ij3}, \max_i b_{ij4}) \rangle \quad (19)$$

$$r_j^- = \langle (\min_i a_{ij1}, \min_i a_{ij2}, \min_i a_{ij3}, \min_i a_{ij4}), (\min_i b_{ij1}, \min_i b_{ij2}, \min_i b_{ij3}, \min_i b_{ij4}) \rangle \quad (20)$$

زمانی که زامین شاخص، از نوع هزینه باشد آنگاه:

$$r_j^+ = \langle (\min_i a_{ij1}, \min_i a_{ij2}, \min_i a_{ij3}, \min_i a_{ij4}), (\min_i b_{ij1}, \min_i b_{ij2}, \min_i b_{ij3}, \min_i b_{ij4}) \rangle \quad (21)$$

$$r_j^- = \langle (\max_i a_{ij1}, \max_i a_{ij2}, \max_i a_{ij3}, \max_i a_{ij4}), (\max_i b_{ij1}, \max_i b_{ij2}, \max_i b_{ij3}, \max_i b_{ij4}) \rangle \quad (22)$$

سپس مطابق تعریف ۵ اندازه فاصله بین گزینه o_i و PIS و NIS تعیین می‌گردد.

تعریف ۶. اندازه فاصله وزنی بین گزینه o_i و PIS به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^n \xi'_{ij} D(r_{ij}, r_j^+) \quad (23)$$

به طوریکه $D(r_{ij}, r_j^+)$ فاصله r_{ij} و r_j^+ تعریف شده در تعریف ۶ می‌باشد، ξ'_{ij}

ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده است که از رابطه (۱۶) بدست آید، و

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

تعریف ۷. اندازه فاصله وزنی بین گزینه o_i و NIS به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$D_i^- = \sum_{j=1}^n \xi'_{ij} D(r_{ij}, r_j^-) \quad (24)$$

به طوریکه $D(r_{ij}, r_j^-)$ فاصله r_{ij} و r_j^- تعریف شده در تعریف ۶ می‌باشد، ξ'_{ij}

ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده است که از رابطه (۱۶) به دست آید، و

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

بنابراین ضریب نزدیکی نسبی گزینه O_i مربوط به گزینه‌های ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_i^- = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} \quad (25)$$

واضح است که گزینه‌ها بر طبق ضریب نزدیکی نسبی رتبه بندی می‌شوند. حال رویه مسئله MCGDM بر پایه روش تاپسیس فازی شهودی دوزنقه‌ای به صورت زیر توسعه داده می‌شود:

گام اول: بدست آوردن ماتریس اوزان شاخص‌ها توسط تصمیم‌گیرندگان با استفاده از متغیرهای کلامی اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای.

گام دوم: تعیین اوزان تصمیم‌گیرندگان با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳).

گام سوم: تشکیل ماتریس تصمیم فازی شهودی دوزنقه‌ای ادغامی نظرات تصمیم‌گیرندگان با استفاده از رابطه (۱۴).

گام چهارم: تعیین ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه به وسیله روابط (۱۵) و (۱۶).

گام پنجم: تعیین PIS و NIS با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸).

گام ششم: محاسبه اندازه‌های فاصله مثبت و منفی با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴).

گام هفتم: محاسبه ضریب نزدیکی نسبی هر گزینه با استفاده از رابطه (۲۵).

گام هشتم: رتبه‌بندی گزینه‌ها مطابق ضرایب نزدیکی نسبی.

مثال عددی

در این بخش، یک مسئله MCGDM در انتخاب نرم افزار برای تشریح روش پیشنهادی استفاده می‌شود.

یک مرکز کامپیوتری می‌خواهد مناسب‌ترین سیستم اطلاعاتی را برای افزایش اثر بخشی کار انتخاب نماید، پس از ارزیابی اولیه، چهار سیستم اطلاعاتی $\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ برای انتخاب‌های بعدی باقی مانده است. چهار گزینه ممکن می‌توانند مطابق سه شاخص مورد ارزیابی قرار بگیرند: C_1 : هزینه نرم افزار و سخت‌افزار، C_2 : کمک به بهبود عملکرد سازمانی و C_3 : قابلیت تولید نرم افزار.

فرآیند انتخاب نرم افزار مناسب به وسیله روش تاپسیس فازی شهودی دوزنقه‌ای

شامل مراحل زیر است:

گام اول: فرض می‌شود که k متخصص (در اینجا $k=4$) برای ارزیابی گزینه‌های ممکن انتخاب شده‌اند. عبارت‌های کلامی استفاده شده برای اولویت‌های تصمیم‌گیرندگان و شاخص‌ها در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای عبارت‌های کلامی

متغیرهای کلامی	ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای
بسیار پایین	$\langle(0.0,0.0,0.0,0.0), (0.0,0.0,0.0,0.0)\rangle$
پایین	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$
نسبتاً پایین	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
متوسط	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
نسبتاً بالا	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
بالا	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$
بسیار بالا	$\langle(1.0,1.0,1.0,1.0), (1.0,1.0,1.0,1.0)\rangle$

هر متخصص ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای را به اوزان شاخص‌ها اختصاص می‌دهد. بنابراین ماتریس اوزان شاخص‌ها در جدول ۶ نشان داده شده است.

جدول ۲. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده یک

	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
o_2	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
o_3	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$
o_4	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$

جدول ۳. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده دو

	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
o_2	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_3	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
o_4	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$

جدول ۴. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده سه

	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
o_2	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_3	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_4	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$

جدول ۵. ماتریس تصمیم فازی شهودی تصمیم گیرنده چهار

	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$
o_2	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_3	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.7,0.8,0.9,1.0), (0.7,0.8,0.9,1.0)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
o_4	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.0,0.1,0.2,0.3), (0.0,0.1,0.2,0.3)\rangle$

جدول ۶. اوزان شاخص‌ها تعیین شده به وسیله تصمیم گیرندگان $(\square_j^{(k)})$

k	c_1	c_2	c_3
1	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
2	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$
3	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.1,0.2,0.3,0.4), (0.0,0.2,0.3,0.5)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$
4	$\langle(0.5,0.6,0.7,0.8), (0.4,0.6,0.7,0.9)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$	$\langle(0.3,0.4,0.5,0.6), (0.2,0.4,0.5,0.7)\rangle$

گام دوم: تعیین اهمیت نسبی نظرات تصمیم‌گیرندگان با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳). اوزان تصمیم‌گیرندگان در این مسئله MCGDM در جدول ۶ نشان داده شده است.

جدول ۷. اهمیت نسبی نظرات تصمیم‌گیرندگان

	k	c_1	c_2	c_3		k	c_1	c_2	c_3
o_1	۱	0.274	0.309	0.278	o_3	۱	0.169	0.167	0.167
	۲	0.297	0.309	0.278		۲	0.251	0.278	0.198
	۳	0.203	0.168	0.167		۳	0.329	0.278	0.317
	۴	0.226	0.214	0.278		۴	0.251	0.278	0.317
o_2	۱	0.309	0.303	0.167	o_4	۱	0.309	0.309	0.250
	۲	0.167	0.168	0.278		۲	0.214	0.167	0.321
	۳	0.215	0.226	0.278		۳	0.309	0.309	0.250
	۴	0.309	0.303	0.278		۴	0.168	0.215	0.179

گام سوم: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری فازی شهودی ذوزنقه‌ای ادغامی بر پایه نقطه نظرات هر تصمیم‌گیرنده با استفاده از رابطه (۱۴) مطابق جدول ۸

جدول ۸. ماتریس تصمیم‌گیری فازی شهودی ذوزنقه‌ای ادغامی

k	c_1	c_2	c_3
o_1	$\langle 0.22, 0.32, 0.42, 0.52 \rangle,$ $\langle 0.14, 0.32, 0.42, 0.60 \rangle$	$\langle 0.48, 0.58, 0.68, 0.78 \rangle,$ $\langle 0.40, 0.58, 0.68, 0.85 \rangle$	$\langle 0.17, 0.27, 0.37, 0.47 \rangle,$ $\langle 0.07, 0.27, 0.37, 0.57 \rangle$
o_2	$\langle 0.32, 0.42, 0.52, 0.62 \rangle,$ $\langle 0.24, 0.42, 0.52, 0.71 \rangle$	$\langle 0.46, 0.56, 0.66, 0.76 \rangle,$ $\langle 0.40, 0.56, 0.66, 0.82 \rangle$	$\langle 0.33, 0.43, 0.53, 0.63 \rangle,$ $\langle 0.23, 0.43, 0.53, 0.73 \rangle$
o_3	$\langle 0.27, 0.37, 0.47, 0.57 \rangle,$ $\langle 0.18, 0.37, 0.47, 0.65 \rangle$	$\langle 0.67, 0.77, 0.87, 0.97 \rangle,$ $\langle 0.65, 0.77, 0.87, 0.98 \rangle$	$\langle 0.29, 0.39, 0.49, 0.59 \rangle,$ $\langle 0.21, 0.39, 0.49, 0.67 \rangle$
o_4	$\langle 0.48, 0.58, 0.68, 0.78 \rangle,$ $\langle 0.40, 0.58, 0.68, 0.85 \rangle$	$\langle 0.32, 0.42, 0.52, 0.62 \rangle,$ $\langle 0.24, 0.42, 0.52, 0.71 \rangle$	$\langle 0.35, 0.45, 0.55, 0.65 \rangle,$ $\langle 0.26, 0.45, 0.55, 0.73 \rangle$

گام چهارم: تعیین ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده شاخص‌ها. بر اساس اهمیت شاخص‌ها $(\xi_j^{(k)})$ تعیین شده به وسیله تصمیم‌گیرنده k ام، ابتدا $\xi_{jj}^{(k)}$ را محاسبه می‌کنیم که نشان دهنده ارزش وزنی شاخص c_j برای گزینه o_i با استفاده از فرمول (۱۵) می‌باشد، و سپس ارزش وزنی مورد انتظار نرمالیزه شده $\xi_{jj}^{(k)}$ می‌تواند با استفاده از رابطه (۱۶) به صورت زیر به دست آید:

$$\left(\xi'_{ij}\right) = \begin{bmatrix} 0.409 & 0.244 & 0.347 \\ 0.401 & 0.253 & 0.345 \\ 0.427 & 0.235 & 0.339 \\ 0.404 & 0.243 & 0.353 \end{bmatrix}$$

گام پنجم: تعیین PIS و NIS. هزینه نرم افزار و سخت افزار (c_1) شاخص هزینه، کمک به بهبود عملکرد سازمانی (c_2) و قابلیت توسعه نرم افزار (c_3) شاخص های سود هستند. بنابراین PIS و NIS به صورت زیر بدست می آیند:

$$R^+ = \{ \langle (0.22, 0.32, 0.42, 0.52), (0.14, 0.32, 0.42, 0.60) \rangle, \langle (0.67, 0.77, 0.87, 0.97), (0.65, 0.77, 0.87, 0.98) \rangle, \langle (0.35, 0.45, 0.55, 0.65), (0.26, 0.45, 0.55, 0.73) \rangle \}$$

$$R^- = \{ \langle (0.48, 0.58, 0.68, 0.78), (0.40, 0.58, 0.68, 0.85) \rangle, \langle (0.32, 0.42, 0.52, 0.62), (0.24, 0.42, 0.52, 0.71) \rangle, \langle (0.17, 0.27, 0.37, 0.47), (0.07, 0.27, 0.37, 0.57) \rangle \}$$

گام ششم: با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴) اندازه های فاصله وزنی مثبت و منفی در جدول ۹ نشان داده شده اند.

جدول ۹. اندازه های فاصله و ضرایب نزدیکی نسبی هر گزینه

	D^+	D^-	U^-
o_1	0.110	0.142	0.565
o_2	0.100	0.153	0.606
o_3	0.040	0.211	0.839
o_4	0.188	0.064	0.252

گام هفتم: ضرایب نزدیکی نسبی U_i^- هر گزینه o_i بر اساس جدول ۵ به دست می آید. گام هشتم: در حالیکه $U_3^- > U_2^- > U_1^- > U_4^-$ باشد، رتبه بندی گزینه ها مطابق $o_3 > o_2 > o_1 > o_4$ می باشد، بنابراین بهترین گزینه o_3 می باشد.

نتیجه گیری

مسائل MCGDM از جمله مسائل حیاتی در پیچیدگی محیط اجتماعی - اقتصادی می باشند. در مسائل واقعی MCGDM، اطلاعات در دسترس تصمیم گیرندگان همواره مبهم و نادقیق می باشند و بیان اولویت های گزینه ها نسبت به شاخص ها با استفاده از

ارزش‌های قطعی و دقیق منطقی نمی‌باشد، بنابراین روش تاپسیس کلاسیک برای این مسائل مفید نیست. به این ترتیب، در این مقاله یک روش تاپسیس توسعه یافته جدید با اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای برای مسائل MCGDM ارائه گردید و روشی برای تعیین گزینه مناسب تر در میان تمامی گزینه‌های ممکن توسعه داده شد. در مدل تاپسیس توسعه یافته پیشنهادی، ارزش اولیتهی یک گزینه نسبت به شاخص‌ها و ارزش وزنی شاخص‌ها با استفاده از اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای شکل می‌گیرد، و اوزان هر تصمیم‌گیرنده نیز کاملاً نامشخص است. با توسعه اعداد فازی و مجموعه‌های فازی شهودی، اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای می‌توانند اطلاعات انعطاف پذیرتر و بیشتری را نسبت به مجموعه‌های فازی شهودی ارائه کنند. در روش‌های MCGDM موجود، اوزان تصمیم‌گیرندگان همواره از پیش تعیین می‌گردید، حال آنکه در مدل پیشنهادی، اندازه فاصله برای اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بر پایه برش‌های آلفای آنها به منظور توسعه روشی برای تعیین اوزان تصمیم‌گیرندگان استفاده شده است. از طرفی اوزان شاخص‌ها همواره از اعداد قطعی تشکیل شده است اما در این مقاله این اوزان به وسیله تصمیم‌گیرندگان با استفاده از ارزش‌های کلامی اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای تعیین گردیده است، و ارزش وزنی مورد انتظار با استفاده از عملگر TrIFWA و ارزش مورد انتظار اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای بدست آمده است. بر اساس اندازه‌های فاصله اعداد فازی شهودی ذوزنقه‌ای، اندازه‌های مجزای وزنی تعریف شده‌اند. بنابراین بر اساس ضرایب نزدیکی نسبی هر گزینه، گزینه‌ها رتبه‌بندی می‌شوند. و در ادامه نتایج مثال عددی کارایی و کاربردی بودن روش تاپسیس توسعه یافته جدید را تشریح می‌کند. روش تاپسیس فازی شهودی ذوزنقه‌ای پیشنهادی می‌تواند با مسائل MCGDM در محیط اطلاعاتی غیر قطعی مواجه گردد و ابزار ریاضی منطقی و ساده‌ای را برای محیط فازی شهودی در مسائل MCGDM فراهم نماید.

منابع

1. S. Abbasbandy, T. Hajjari, **A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy number**, *Comput. Math. Appl.* 57 (2009) 413-419.
2. B. Asady, A. Zendehnam, **Ranking fuzzy numbers by distance minimization**, *Appl. Math. Model.* 31 (2007) 2589-2598.
3. B. Ashtiani, F. Haghhighirad, G.A. Montazer, **Extension of fuzzy TOPSIS method based on interval-valued fuzzy sets**. *Appl. Soft Comput.* 9 (2009) 457-461.
4. K. Atanassov, **Intuitionistic fuzzy sets**. *Fuzzy Sets Syst.* 20 (1986) 87-96.
5. A. Awasthi, S.S. Chauhan, S.K. Goyal, **A multi-criteria decision making approach for location planning for urban distribution centers under uncertainty**, *Math. Comput. Model.* 53 (2011) 98-109.
6. F.E. Boran, S. Genç, M. Kurt, D. Akay, **A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method**, *Expert Syst. Appl.* 36 (2009) 11363-11368.
7. C.T. Chen, **Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment**, *Fuzzy Sets Syst.* 114 (2000) 1-9.
8. S.M. Chen, L.W. Lee, **Fuzzy multiple attributes group decision-making based on the interval type-2 TOPSIS method**, *Expert Syst. Appl.* 37 (2010) 2790-2798.
9. T.Y. Chen, C.Y. Tsao, **The interval-valued fuzzy TOPSIS method and experimental analysis**, *Fuzzy Sets Syst.* 159 (2008) 1410-1428.
10. Z. Chen, W. Yang, **A new multiple attribute group decision making method in intuitionistic fuzzy setting**, *Appl. Math. Model.* (2011) doi: 10.1016/j.apm.2011.03.015.
11. T-C. Chu, Y-C. Lin, **An interval arithmetic based fuzzy TOPSIS model**, *Expert Syst. Appl.* 36 (2009) 10870-10876.
12. T-C. Chu, Y-C. Lin, **A fuzzy TOPSIS method for robot selection**, *Int. J. Adv. Manuf. Tech.* 21 (2003) 284-290.
13. D. Dubois, H. Prade, **The mean value of a fuzzy number**, *Fuzzy Sets Syst.* 24 (1978) 279-300.
14. P. Grzegorzewski, **The hamming distance between intuitionistic fuzzy sets**, In *Proceedings of the 10th IFSA world congress, Istanbul, Turkey, 2003*.
15. C. L., Hwang, K. Yoon, **Multiple attributes decision making methods and applications**, Springer, Berlin, Heidelberg, 1981.
16. G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, & M. Izadikhah,

- Extension of the TOPSIS method for decision-making problems with fuzzy data**, Appl. Math. Comput. 181 (2006) 1544-1551.
17. M. S. Kuo, G. H. Tzeng, W. C. Huang, **Group decision-making based on concepts of ideal and anti-ideal points in a fuzzy environment**, Math. Comput. Model. 45 (2007) 324-339.
 18. I. Mahdavi, N. Mahdavi-Amiri, A. Heidarzade, R. Nourifar, **Designing a model of fuzzy topsis in multiple criteria decision making**. Appl. Math. Comput. 206 (2008) 607-617.
 19. H. M. Nehi, H. R. Maleki, optimization problem, In Proceedings of the 9th WSEAS international conference on systems, Athens, Greece, 2005.
 20. J.H. Park, I.Y. Park, Y.C. Kwun, X. Tan, **Extension of the TOPSIS method for decision making problems under interval-valued intuitionistic fuzzy environment**, Appl. Math. Model. 35 (2011) 2544-2556.
 21. S. Sadi-Nezhad, K. K. Damghani, **Application of a fuzzy TOPSIS method base on modified preference ratio and fuzzy distance measurement in assessment of traffic police centers performance**, Appl. Soft Comput. 10 (2010) 1028-1039.
 22. C.C. Sun, **A performance evaluation model by integrating fuzzy AHP and fuzzy TOPSIS methods**, Expert Syst. Appl. 37 (2010) 7745-7754.
 23. C. Tan, **A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making with Choquet integral-based TOPSIS**, Expert Syst. Appl. 38 (2011) 3023-3033.
 24. G. Torlak, M. Sevkli, M. Sanal, S. Zaim, **Analyzing business competition by using fuzzy TOPSIS method: An example of Turkish domestic airline industry**, Expert Syst. Appl. 38 (2011) 3396-3406.
 25. B. Vahdani et al., **Group decision making based on novel fuzzy modified TOPSIS method**, Appl. Math. Model. (2011) doi:10.1016/j.apm.2011.02.040.
 26. A.H. Vencheh, M. Allame, **On the relation between a fuzzy number and its centroid**, Comput. Math. Appl. 59 (2010) 3578-3582.
 27. J. Q. Wang, Z. Zhang, **Aggregation operators on intuitionistic trapezoidal fuzzy number and its application to multicriteria decision making problems**, J. Syst. Eng. Electron. 20 (2009) 321-326.
 28. T.-C. Wang, H.-D. Lee, **Developing a fuzzy TOPSIS approach based on subjective weights and objective weights**, Expert Syst. Appl. 36 (2009) 8980-8985.

29. Y. J. Wang, H. S. Lee, **Generalizing TOPSIS for fuzzy multiple-criteria group decision-making**, Comput. Math. Appl. 53 (2007) 1762-1772.
30. J.Z. Wu, Q. Zhang, **Multicriteria decision making method based on intuitionistic fuzzy weighted entropy**, Expert Systems with Applications, (2010).
31. F. Ye, **An extended TOPSIS method with interval-valued intuitionistic fuzzy numbers for virtual enterprise partner selection**, Expert Syst. Appl. 37 (2010) 7050-7055.
32. J. Ye, **Expected value method for intuitionistic trapezoidal fuzzy multicriteria decision-making problems**, Expert Syst. Appl. (2011) doi: 10.1016/j.eswa.2011.03.059.
33. L. A. Zadeh, **Fuzzy sets**, Inform. Control 8 (1965) 338-356.