Industrial Management Studies
Vol(issue), PP.
.atu.ac.ir
DOI:

ATU PRESS

Comparing the Efficiency of Shrinkage Covariance Estimators in Optimizing the Performance of Global Minimum Variance Portfolios in the Iranian Capital Market

Gholamhossein Golarzi *
Department of Business Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Sciences, Semnan University, Semnan, Iran

Yadollah Heyvadi
Department of Industrial Management, Faculty of Economics, Management and Administrative Sciences, Semnan University, Semnan, Iran

Abstract

One way to mitigate estimation errors in the covariance matrix of returns is the use of shrinkage covariance estimators. This study compares the performance of two prominent shrinkage methods—minimizing the negative log-likelihood and minimizing the Frobenius norm—in enhancing the performance of the global minimum-variance (GMV) portfolio. Using monthly returns from 35 industry indices in the Iranian stock market over a 101-month period, the study evaluates the out-of-sample performance of three GMV portfolio construction methods: the classical approach (based on the sample covariance matrix) and two shrinkage-based approaches (minimizing the negative log-likelihood and the Frobenius norm). The evaluation criteria include portfolio variance, turnover, and the Sharpe ratio. The results indicate that GMV portfolios based on the traditional approach exhibit the highest levels of out-of-sample variance and turnover, primarily due to the extreme instability of the sample covariance matrix. Furthermore, the application of both shrinkage approaches leads to an improvement in portfolio performance.

* Corresponding Author: g_golarzi@semnan.ac.ir
~~**How to Cite:** xxxxxxx~~

eISSN: 2476-5988 ISSN: 2251-8037 Accepted: Review Received: Original Research

Keywords: Covariance Matrix, Global Minimum Variance Portfolio, Risk Management, Shrinkage Estimator, Turnover

Introduction

In modern portfolio theory, the global minimum variance (GMV) portfolio occupies a distinctive position on the efficient frontier: it has the lowest return variance among all feasible portfolios. Constructing this portfolio does not require estimates of expected returns, but its out-of-sample performance depends on how accurately the covariance matrix of asset returns is estimated. When the number of assets is large relative to the number of return observations, estimation error in the sample covariance matrix can translate into unstable portfolio weights. As the estimation window moves forward, these weights may change substantially, leading to high portfolio turnover without necessarily reducing realized risk (Ledoit & Wolf, 2003).

Linear covariance shrinkage addresses this problem by combining the sample covariance matrix with a structured target matrix. The *shrinkage intensity* determines the weight assigned to the target and, consequently, the extent to which the estimator relies on the observed sample covariances. This study considers two criteria for selecting that intensity: minimizing the negative log-likelihood (NLL) through cross-validation and minimizing covariance estimation error under the Frobenius norm. Because the two criteria evaluate estimation quality differently, the shrinkage intensities they select may lead to different portfolio weights and different outcomes for investors.

The Iranian capital market provides a relevant setting for this comparison. In the present study, the covariance matrix for 35 industry indices is estimated from only 40 monthly return observations in each rolling window. Under these conditions, the practical question is not only whether shrinkage reduces out-of-sample variance relative to the conventional sample covariance estimator, but also how much trading is required to maintain the resulting portfolios. Accordingly, this study compares the two shrinkage methods with the sample covariance estimator, focusing on out-of-sample variance as a measure of realized risk and portfolio turnover as a measure of rebalancing activity.

Methodology

The study used monthly returns on 35 industry indices listed on the Tehran Stock Exchange. The indices were selected purposively based on the continuity of their return histories over the study period (March 2017–July 2025) and their coverage of different sectors of the Iranian economy. Each estimation window contained 40 monthly observations for 35 indices, giving an asset-to-observation ratio of $35/40 = 0.875$. With this ratio close to one, the sample covariance matrix can be poorly conditioned, making portfolio weights sensitive to estimation error.

Three covariance estimators were compared: the sample covariance matrix (S) as the benchmark and two linear shrinkage estimators. Both shrinkage methods used the same diagonal target, $\hat{\Sigma}_{\text{target}} = \text{Diag}(s_{11}, \dots, s_{ii}, \dots, s_{pp})$, where $s_{ii}$is the sample variance of industry i. The estimator was defined as $\hat{\Sigma}_{\nu} = (1-\nu)S + \nu\hat{\Sigma}_{\text{target}}$. Thus, shrinkage preserved each industry's estimated variance while moving the estimated covariances toward zero. The two methods differed only in how they selected the shrinkage intensity, ν. The first used K-fold cross-validation within each training window to minimize the negative log-likelihood on the validation folds (Shi et al., 2025). The second estimated νanalytically to minimize the expected squared Frobenius distance between the shrinkage estimator and the population covariance matrix (Ledoit & Wolf, 2004). For each of the three estimators, the global minimum variance (GMV) portfolio weights were calculated as $\hat{w} = \frac{\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, subject only to the requirement that the weights sum to one.

A rolling-window simulation was used to compare the three methods under identical conditions. At each step, covariance matrices and portfolio weights were estimated from the preceding 40 months, and the resulting portfolios were evaluated using returns in the following month. The window then advanced by one month, yielding 61 out-of-sample monthly returns per method. Portfolio risk was measured by the sample variance of these returns. Turnover was calculated as $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left(|w_{i,t} - w_{i,t-1}|\right)$, the one-way change between consecutive target allocations, and averaged across rebalancing periods. The Sharpe

ratio was reported as a supplementary measure of risk-adjusted performance. Finally, numerical stability was assessed using the condition number of each estimated covariance matrix, $k(\Sigma) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{min}}$, with larger values indicating greater sensitivity to estimation error.

Results and Conclusion

Over the 61-month out-of-sample period, both shrinkage estimators yielded global minimum variance (GMV) portfolios with lower realized variance and turnover than the sample covariance benchmark. Negative log-likelihood (NLL) minimization yielded the lowest realized variance (0.0065), whereas Frobenius norm minimization yielded the lowest turnover (0.1843) and the highest Sharpe ratio (0.5884).

Monthly return volatility varied considerably across the 35 industry indices. Petroleum products and retail trade excluding motor vehicles had the highest standard deviations (59.82% and 40.60%, respectively), whereas computers and chemicals had the lowest (10.49% and 10.94%, respectively). In the full 101-month sample, shrinkage improved the numerical conditioning of the covariance matrix: the condition number fell from 1,157 for the sample covariance matrix to 142 under NLL shrinkage and 108 under Frobenius shrinkage.

The results support giving linear shrinkage estimators priority over the sample covariance matrix when constructing GMV portfolios in the Iranian capital market. For portfolio managers and institutional investors, the choice between the two methods depends on whether the primary objective is to minimize realized variance or limit rebalancing.

مقاله پژوهشی

مطالعات مدیریت صنعتی
دوره ؟، شماره ؟، نام فصل، سال، ص ص
.atu.ac.ir
DOI:

تاریخ دریافت: 00/00/00؛ تاریخ پذیرش: 00/00/00 ISSN:2251-8037 eISSN: 2476-5988

مقایسه کارائی برآوردگرهای کواریانس انقباضی در بهینه سازی عملکرد پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع در بازار سرمایه ایران

غلامحسین گل ارضی *
گروه مدیریت بازرگانی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

یدالله هیودی
گروه مدیریت صنعتی، دانشکده اقتصاد، مدیریت و علوم اداری، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

چکیده

وجود تعداد زیاد اوراق بهادار در بازارهای مالی باعث بروز خطا در برآورد ماتریس کواریانس بازده اوراق بهادار می‌گردد. یکی از راه حلهایی که برای رفع این مشکل وجود دارد استفاده از برآوردگرهای کواریانس انقباضی می‌باشد. این پژوهش به مقایسه عملکرد دو روش مطرح انقباضی شامل کمینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی و کمینه‌سازی خطای فروبنیوس در بهبود عملکرد پرتفولیوی حداقل واریانس جامع پرداخته است. با بهره‌گیری از بازدهی ماهانه 35 شاخص صنعت از بازار سرمایه ایران در یک دوره ۱۰۱ ماهه، عملکرد پرتفولیوها عملکرد خارج از نمونه سه روش تشکیل پرتفولیوی حداقل واریانس جامع شامل روش کلاسیک یا روش مبتنی بر ماتریس کوواریانس نمونه و دو روش انقباضی مبتنی بر روش‌های کمینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی و کمینه‌سازی خطای فروبنیوس از نظر واریانس، گردش مالی و عملکرد تعدیل شده با ریسک (نسبت شارپ) از طریق شبیه‌سازی پنجره غلطان با پنجره آموزشی ۴۰ ماهه و گام پیشروی ۱ ماهه و دوره ارزیابی خارج از نمونه 61 ماهه مقایسه شدند. نتایج نشان داد که پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع شکل گرفته مبتنی بر رویکرد سنتی به دلیل ناپایداری شدید ماتریس کوواریانس نمونه، در خارج نمونه دارای بالاترین میزان واریانس (0/1065)، بیشترین گردش مالی (3/89) و کمترین نسبت شارپ (0/1133) بودند. در مقابل، به‌کارگیری رویکردهای انقباضی کمینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی

مقاله حاضر مستخرج از طرح پژوهشی درون دانشگاهی (از نوع الف) در دانشگاه سمنان با عنوان "مقایسه کارائی برآوردگرهای کواریانس انقباضی در بهینه‌سازی عملکرد پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع در بازار سرمایه ایران" با شماره قرارداد 14051331 ط 226/1405 به تاریخ 1405/06/16 می‌باشد.

* نویسنده مسئول: g_golarzi@semnan.ac.ir

و خطای فروبنیوس به‌ترتیب منجر به کاهش واریانس به 0/0065 و 0/0069، کاهش گردش مالی به 0/2488 و 0/1843 و در نتیجه ارتقای نسبت شارپ به 0/5508 و 0/5884 شد.

کلیدواژه‌ها: برآوردگر انقباضی، پورتفولیوی حداقل واریانس جامع، گردش مالی، ماتریس کوواریانس، مدیریت ریسک

آماده انتشار

مقدمه

براســاس نظریه نوین پرتفولیو[1]، از میان پورتفولیوهای واقع شــده بر روی منحنی مرز کارا، پرتفولیوی حداقل واریانس جامع[2] به دلیل داشتن حداقل ریسک ممکن مورد توجه خاص می‌باشــد. عملکرد پرتفولیوی مذکور همانند دیگر پرتفولیوهای واقع بر روی منحنی مرز کارا به دقت برآورد ماتریس کوواریانس بازده دارائی‌ها بســتگی دارد. ماتریس کواریانس به روش ســنتی در معرض خطاهای تخمین ناشــی از بزرگی ابعاد بازار قرار دارند. یعنی چنانچه تعداد ســهام مورد معامله در بازار زیاد باشــند ولی حجم نمونه مورد بررســی به آن نسبت بزرگ نباشد، در آن‌صورت به دلیل ناپایداری وزن‌ها و بالا رفتن واریانس خارج از نمونه[3] و حجم‌های غیرعادی معاملات، ماتریس کوواریانس نمونه انتخابی، خطای قابل توجهی خواهد داشــت (Ledoit and Wolf, 2003). به اعتقاد صــاحب‌نظران با بهبود برآوردگرها در ماتریس کواریانس این مشــکلات تا حد زیادی برطرف می‌شــود. یکی از این روش‌ها، بکارگیری برآوردگر کوواریانس انقباضــی خطی[4] اســت. این برآوردگر ترکیبی از ماتریس کوواریانس نمونه و یک ماتریس هدف[5] ســاختاریافته اســت. در این رویکرد، عملکرد نهایی پرتفولیو به شــدت انقباض[6] انتخابی بستگی دارد. شــدت انقباض به روش‌های مختلفی محاسبه می‌شود که از معروف‌ترین این روش‌ها، روش کمینه‌سازی تابع لگاریتم درست‌نمایی منفی[7] و کمینه‌سازی خطای فروبنیوس[8] می‌باشند.

بر همین اساس این پژوهش به بررسی و مقایسه تأثیر برآوردگرهای انقباضی فوق الذکر در بهبود عملکرد خارج از نمونه پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع یعنی ریسک (واریانس) و حجم معاملات (گردش مالی) می‌پردازد.

در خصوص ضرورت و اهمیت انجام پژوهش می‌توان گفت که اولاً، در بازاهای با ابعاد بالا[9] منجمله بازار سرمایه ایران، برآورد کوواریانس به صورت سنتی باعث ناپایداری آماری

---

[1] Modern portfolio theory (MPT)
[2] Global minimum variance (GMV)
[3] Out-of-sample
[4] Linear shrinkage estimator
[5] Target matrix
[6] Optimal shrinkage intensity
[7] Negative log-likelihood (NLL)
[8] Frobenius norm
[9] High-dimensionality

و نوسان در وزن‌های بهینه بدست آمده می‌شود. ثانیاً، با وجود اهمیت غیر قابل انکار موضوع، نیاز به انجام پژوهشی که به مقایسه عملکرد روش‌های تعیین شدت انقباض، نظیر کمینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی (با اعتبارسنجی متقابل) و کمینه‌سازی خطای فروبنیوس در بازار سرمایه بپردازد به شدت احساس می‌شود.

پیشینه پژوهش

در نظریه نوین پورتفولیو که توسط مارکویتز در سال **1952** ارائه گردیده است، وزن‌های بهینه دارائی‌ها در پورتفولیو به عنوان توابعی از میانگین و ماتریس کوواریانس بین بازده دارایی‌ها بدست می‌آید. بزرگترین انتقاد وارده به این مدل تأثیر پذیری شدید عملکرد آن از ریسک برآورد[1] پارامترها می‌باشد (Klein and Bawa,1976؛ Jobson and Korkie, 1980؛ Frost and Savarino, 1988؛ Michaud, 1989). از آنجاکه خطاهای مربوط به برآورد بازده‌های مورد انتظار در مقایسه با خطاهای تخمین ماتریس کوواریانس، تأثیر نامطلوب بیشتری بر عملکرد پرتفولیو دارد (Merton, 1980)، محققان در تحقیقات خود، بر پرتفولیوی حداقل واریانس جامع که صرفاً به تخمین کواریانس متکی است، تمرکز نمودند (Ledoit and Wolf, 2003؛ Jiang et al., 2019؛ Shi et al., 2020). در بازارهای با ابعاد بالا که تعداد دارایی‌های موجود در آن (P) بیشتر از تعداد دارائی‌های نمونه یا تعداد مشاهدات (T) است، وزن‌های بدست آمده از نمونه، می‌توانند مقادیر بسیار زیادی به خود گرفته و در نتیجه با گذشت زمان ثبات آنها کاهش یافته و در نتیجه ماتریس کوواریانس نمونه بصورت قابل توجهی در معرض خطای تخمین قرار می‌گیرد (Ledoit and Wolf, 2003). در چنین شرایطی، برآوردگرهای سنتی ماتریس کوواریانس در نمونه، دچار ریسک برآورد بالا، وزن‌های ناپایدار دارائی‌ها و عملکرد ضعیف خارج از نمونه می‌شود (Golosnoy et al., 2020).

صاحب‌نظران رویکردهای مختلفی برای مقابله با این چالش مطرح کردند. این رویکردها در یک تقسیم‌بندی کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند: دسته اول) رویکردهایی که به اعمال محدویت‌های برونزا بر وزن‌های پرتفولیو تأکید دارند. این رویکردها با بکارگیری

[1] Estimation risk

محدودیت‌هایی از قبیل محدود نمودن فروش استقراضی و تعیین آستانه برای وزن‌ها، وزن‌های غیرعادی را کاهش داده و باعث ثبیت آنها می‌شوند (Jagannathan and Ma, 2003). دسته دوم) رویکردهایی هستند که با توسعه برآوردگرهای دقیق‌تر برای ماتریس کوواریانس به ثبات وزن‌ها کمک می‌کنند. این رویکردها که طرفداران بیشتری هم دارند، با بهبود دقیق‌تر برآوردگرها تلاش دارند تا خطای تخمین ماتریس کوواریانس در نمونه را کاهش داده و از این طریق به ثبات وزن‌ها و عملکرد مطلوب خارج از نمونه کمک کنند. از آنجاکه ماتریس کواریانس نمونه در مقایسه با ماتریس کوواریانس هدف، واریانس بالاتری دارد، محققان سعی نموده‌اند تا با بکارگیری برآوردگر انقباضی خطی[1] مقادیر برآورد شده را منقبض نموده و از این طریق با کاهش واریانس، خطای تخمین مدل را کاهش دهند. برای این منظور ماتریس‌های مختلفی از جمله ماتریس واحد(Ledoit and Wolf, 2004b)، ماتریس ثابت دوگانه، ماتریس قطری ، ماتریس همبستگی ثابت[2] (Ledoit and Wolf, 2004a)، ماتریس کوواریانس مبتنی بر یک مدل تک عاملی (Ledoit and Wolf, 2003) و ترکیبی از یک ماتریس بسیار ساختاریافته و یک تخمین‌گر مبتنی بر برش مقادیر ویژه[3] (Deshmukh and Dubey,2020) را ارائه نمودند. اصلی‌ترین چالش در رویکرد اخیر، تعیین میزان انقباض بهینه می‌باشد که می‌تواند به روش‌های مختلفی صورت گیرد که از مهمترین این روش‌ها می‌توان به روشهای آماری مانند کمینه سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی و یا روش‌های تحلیلی مانند کمینه‌سازی خطای میانگین مربع نرم فروبنیوس بین ماتریس کوواریانس واقعی و کواریانس انقباضی برآورد شده جهت تعیین شدت بهینه انقباض اشاره نمود (Ledoit and Wolf, 2003). روش لگاریتم درست‌نمایی منفی مبتنی بر جستجوی عددی است؛ بدین معنا که پس از تعریف تابع هدف لگاریتم درست‌نمایی منفی، با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی، به صورت تکراری و گام به گام، بهترین مقدار پارامتر انقباض (v) که تابع را حداقل می‌کند، شناسایی می‌شود. روش فروبنیوس مبتنی بر یک فرمول تحلیلی است. در این روش از طریق بهینه‌یابی ریاضی به طور

[1] Linear shrinkage estimators
[2] Constant correlation matrix (CCM)
[3] Eigenvalue clipping-based estimator

مستقیم مقدار بهینه (v) بدون نیاز به هیچ‌گونه الگوریتم جستجوی تکراری محاسبه می‌شود (Shi et al., 2020؛ Golosnoy et al., 2020؛ Jiang et al., 2019).

انقباض خطی، به‌ویژه در محیط‌های با ابعاد بالا به صورت توزیع-آزاد[1] عمل کرده و عملکرد بهینه‌ای دارد. در این چارچوب، انتخاب روش کمینه‌سازی و ماتریس هدف، نقش تعیین‌کننده‌ای در عملکرد حداقل واریانس جامع ایفا می‌کند. کمینه‌سازی خطای فروبنیوس، بر پایه حداقل‌سازی مجموع مربعات عناصر خطا، دقت کلی ماتریس را هدف قرار می‌دهد، در حالی که کمینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی، بر حداکثر درست‌نمایی تمرکز دارد و برای ساختارهای پویا و وابستگی‌های غیرایستا مناسب‌تر است (Engle et al., 2019؛ Lu et al., 2024).

پژوهش‌های تجربی متعددی کارایی روش‌های انقباضی در برآورد ماتریس کوواریانس و بهینه‌سازی سبد دارایی را مورد بررسی قرار داده‌اند. لدوا و ولف (2003، 2004 الف، 2004 ب) به عنوان پیشگامان این حوزه نشان دادند که برآوردگرهای انقباضی که با کمینه‌سازی خطای فروبنیوس بهینه می‌شوند، عملکرد پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع را در بازارهای توسعه‌یافته به طور قابل توجهی بهبود می‌بخشند. این روش‌ها منجر به کاهش واریانس خارج از نمونه و افزایش ثبات پرتفولیو می‌شوند. با این حال، چالش برآورد دقیق پارامترها همچنان پا برجا باقی ماند. دِمیگوئل و همکاران[2] (2009 الف) در یک مطالعه جامع، عملکرد ده استراتژی تخصیص دارایی، از جمله پورتفولیوهای حداقل واریانس جامع مبتنی بر برآوردگرهای انقباضی، را مقایسه کردند و نشان دادند که روش‌های ساده مانند تشکیل پرتفولیو از طریق وزن‌دهی برابر، در بسیاری از موارد از روش‌های بهینه‌سازی پیچیده بهتر عمل می‌کنند. جاگانناتان و ما (2003) دریافتند که اعمال محدودیت‌های وزنی مانند عدم فروش استقراضی به عنوان یک نوع منظم‌سازی عمل کرده و عملکرد پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع را بهبود می‌بخشد.

با پیشرفت روش‌های محاسباتی و دسترسی به داده‌های با فراوانی بالا، پژوهشگران به بررسی برآوردگرهای پیچیده‌تر و دقیق‌تر روی آوردند. گولوسنوی و همکاران (2020)

---

[1] distribution-free
[2] DeMiguel et al

در مطالعات خود دریافتند که در بازارهای با ابعاد بالا، برآوردگرهای انقباضی و منظم‌شده مزایای قابل توجهی نسبت به برآوردگرهای نمونه‌ای سنتی دارند. آن‌ها همچنین از برآوردگرهای تحقق‌یافته[1] که برای محاسبه آن از داده‌های درون‌روزی با فراوانی بالا[2] استفاده می‌شود استفاده کردند تا دقت برآورد کوواریانس شرطی را افزایش دهند. بیان و همکاران[3] (2020) رویکرد رگولاریزاسیون مضاعف[4] را معرفی کردند که به طور همزمان با انقباض زمانی و مقطعی، ریسک پرتفولیو و حجم معاملات را به طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. وانگ و همکاران[5] (2025) دریافتند که روش‌های ساده‌تر می‌توانند عملکرد خارج از نمونه بهتری ارائه دهند و به نسبت شارپ بالاتر و حداکثر افت[6] کمتری دست یابند. بودنار و همکاران[7] (2017) رویکرد بیزی را برای تخمین پرتفولیوهای بهینه ارائه نمودند، این چارچوب به تحلیل‌گران اجازه می‌دهد تا علاوه بر ارائه یک برآورد نقطه‌ای، از باورهای قبلی[8] سرمایه‌گذار استفاده کرده و توزیع پسین[9] کاملی از وزن‌های پرتفولیو به دست آورند. بودنار و همکاران[10] (2018) دریافتند که رویکرد ماتریس تصادفی به یک نوع برآوردگر انقباضی منجر می‌شود که مستقل از توزیع بازده بوده و در به حداقل رساندن واریانس خارج از نمونه بهینه عمل می‌کند.

در همین راستا، ژو و لی[11] (2026) با معرفی رویکردی نوآورانه مبتنی بر نرم‌های l_p برای آزمون معناداری ماتریس همبستگی در فضاهای با ابعاد بالا، راهکار مؤثری برای غلبه بر محدودیت‌های آماره‌های سنتی ارائه کرده‌اند. این پژوهش‌ها لزوم بهره‌گیری از روش‌های پیشرفته (مانند آماره‌های مبتنی بر U-statistic) را برای حفظ دقت برآورد در محیط‌های با ابعاد بالا اثبات می‌کنند.

---

[1] Realized estimators
[2] High-frequency intraday data
[3] Bian et al.
[4] double regularization
[5] Wang et al.
[6] drawdown
[7] Bodnar et al.
[8] Priors
[9] Posterior distribution
[10] Bodnar et al.
[11] Xu, Y., & Li, W.

مطالعات جدیدتر به طور خاص بر روش‌های تعیین شـــدت انقباض تمرکز دارند. پژوهش‌های مرتبطی که بر مبنای کمینه‌ســازی لگاریتم درســت‌نمایی منفی با اعتبارســنجی متقابل انجام شـــده‌اند، نشـــان می‌دهند که این رویکرد می‌تواند به برآوردگرهای ماتریس کوواریانس پایدارتر و در نتیجه پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع با واریانس کمتر با حجم معاملات کمتر را باعث شوند (Shi et al., 2025).

وانگ، پاپایلیاس و ونتر[1] (2026) در پژوهش اخیرشـــان، مدل تخمین پویای مبتنی بر خوشه‌بندی سلسله‌مراتبی را معرفی کردند که با تلفیق کوواریانس‌های غلتان با ساختارهای خوشـــه‌ای، پایداری و پاسـخ‌گویی برآوردها را در مدل‌های حداقل واریانس ارتقا می‌دهد. این پژوهش‌ها به‌طور ضـــمنی تأیید می‌کنند که روش‌های ســـنتی به دلیل اتکای صـــرف به ماتریس‌های نمونه‌ای، در بازارهای پرنوســـان دچار خطای برآورد می‌شـــوند و جایگزینی آن‌ها با مدل‌های منعطف‌تر، ضرورتی اجتناب‌ناپذیر برای بهبود عملکرد پرتفولیو است.

توســـعه روش‌های برآورد کوواریانس در ابعاد بالا، فراتر از تکنیک‌های خطی ســـنتی حرکت کرده است. به تازگی، ادبیات پژوهش نشان داده است که تکنیک‌های کاهش ابعاد غیرخطی، در مقایســه با روش‌های خطی، بهبود در دقت برآورد کوواریانس فراهم می‌کنند (Conlon et al., 2025). با وجود این پیشـرفت‌ها، اهمیت برآوردگرهای انقباضـی به عنوان ابزارهایی با تفســیرپذیری بالا و کارایی محاســباتی اثبات‌شـــده در بازارهای مالی، همچنان به عنوان یک رویکرد غالب و استاندارد حفظ شده است.

هانســـون[2] (2026) در پایان‌نامه خود با بهره‌گیری از رویکردهای یادگیری ماشـــین (خودرمزگذارهای شـــرطی)، به پیش‌بینی غیرخطی کوواریانس دارایی‌ها پرداخته اســـت. یافته‌های او نشـــان می‌دهد که اگرچه رویکردهای پیچیده‌تر می‌توانند عملکرد پیش‌بینی را ارتقا دهند، اما برآوردگرهای انقباضـــی همچنان به عنوان یک معیار عملکردی قابل‌اتکا در بازارهای مالی عمل می‌کنند. این موضـوع اهمیت پژوهش حاضـر را در تثبیت نقش کلیدی برآوردگرهای انقباضی در بازارهای نوظهور، همچون بازار سرمایه ایران، دوچندان می‌کند.

---

[1] Wang, C., Papailias, F., & Ventre, C.
[2] Hansson, A.

براســاس این یافته‌ها، پژوهش حاضــر قصــد دارد تا به مقایســه دو روش کلیدی یعنی کمینه‌ســازی لگاریتم درســت‌نمایی منفی و کمینه‌ســازی خطای فروبنیوس در پرتفولیوی حداقل واریانس جامع در بازار سرمایه ایران بپردازد.

با در نظر گرفتن هدف اصلی پژوهش مبنی بر بهبود عملکرد پرتفولیو با حداقل واریانس جامع از طریق برآوردگرهای کوواریانس انقباضی و ارزیابی تأثیر آن‌ها بر کاهش واریانس و گردش معاملات، فرضیه‌های پژوهشی زیر مطرح شده‌اند:

فرضیه اصلی اول: برآوردگرهای کوواریانس انقباضی منجر به کاهش معنادار واریانس خارج از نمونه پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع در مقایســه با اســتفاده از ماتریس کوواریانس نمونه در بازار سرمایه ایران می‌شوند.

فرضــیه فرعی اول: واریانس خارج از نمونه پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع با کواریانس انقباضی مبتنی بر کمینه‌سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی، به طور معناداری کمتر از واریانس خارج از نمونه پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع با کواریانس انقباضــی مبتنی بر کمینه‌سازی خطای فروبنیوس است.

فرضیه اصلی دوم: برآوردگرهای کوواریانس انقباضی به طور معناداری حجم معاملات (گردش مالی) خارج از نمونه پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع را در مقایسه با استفاده از ماتریس کوواریانس نمونه در بازار سرمایه ایران کاهش می‌دهد.

روش‌شناسی پژوهش

جامعه آماری و نمونه پژوهش: جامعه آماری این پژوهش شامل کلیه شاخص‌های صنایع موجود در بورس اوراق بهادار تهران است. نمونه مورد استفاده در این پژوهش شامل 35 شاخص است که بصورت قضاوتی با معیارهایی همچون داشتن سابقه کافی و پیوسته در طول دوره مورد بررسی و نیز نمایندگی از بخش‌های مختلف اقتصاد، انتخاب شده‌اند. این پژوهش برای بازه زمانی اول فروردین 1396 تا پایان تیر 1404 صورت گرفته است. از منظر آماری، ابعاد بالا به معنای مطلق تعداد دارایی‌ها نیست، بلکه به نسبت تعداد متغیرها به تعداد مشاهدات در پنجره آموزشی بستگی دارد. در این مطالعه، با استفاده از پنجره آموزشی ۴۰ ماهه و تعداد ۳۵ صنعت، نسبت p/n برابر با $0/87$ است. در ادبیات مدیریت مالی، زمانی که این نسبت به

۱ نزدیک می‌شود، خطای برآورد ماتریس کوواریانس به شدت افزایش یافته و روش‌های سنتی دچار ناکارآمدی می‌شوند. بنابراین، استفاده از برآوردگرهای انقباضی در این ابعاد، کاملاً با الزامات پژوهش‌های "ابعاد بالا" مطابقت دارد.

روش‌های آماری و شبیه‌سازی: برای ارزیابی عملکرد خارج از نمونه پرتفولیوها و مقایسه روش‌های تخمین کوواریانس، از رویکرد شبیه‌سازی پنجره غلطان[1] طی مراحل زیر استفاده شده است:

1- انتخاب طول پنجره آموزش[2]: برای تخمین ماتریس کوواریانس و محاسبه وزن‌های پرتفولیو، از یک پنجره داده‌های تاریخی با طول 40 ماه استفاده می‌شود. این طول پنجره به اندازه کافی بلند انتخاب شده تا به برآوردگرها اجازه یادگیری کافی از داده‌ها را بدهد.

2- گام پیشروی[3]: پس از هر دوره تخمین و محاسبه وزن، پرتفولیو برای یک ماه آینده (خارج از نمونه) ارزیابی می‌شود. سپس پنجره آموزش به اندازه یک ماه به جلو حرکت می‌کند.

3- تکرار: این فرآیند به صورت متوالی برای تمامی دوره‌های قابل ارزیابی (61 دوره) تکرار می‌شود تا یک سری زمانی از بازدهی‌های خارج از نمونه و وزن‌های پورتفولیو برای هر روش حاصل شود.

عملکرد پرتفولیوها براساس معیارهای زیر سنجیده می‌شود:

-واریانس خارج از نمونه[4]: نشان‌دهنده ریسک پرتفولیو در دوره‌های آتی است که طبق رابطه (1) محاسبه می‌شود.

$$\sigma_{\rho}^{2} = \frac{1}{T_{oos} - 1} \sum_{t=1}^{T_{oos}} \left(R_{p,t} - \mu_{\rho}\right)^{2} \qquad \text{(رابطه 1)}$$

که $R_{p,t}$ بازدهی پرتفولیو در ماه t از دوره ارزیابی خارج از نمونه و μ_{ρ} میانگین بازدهی پرتفولیو در کل دوره‌های خارج از نمونه است که طبق رابطه زیر محاسبه گردیده است:

---

[1] Rolling Window Simulation
[2] In-sample Window Length
[3] Step Size
[4] Out-of-sample variance

آماده انتشار

$$\mu_\rho = \frac{1}{T_{oos}} \sum_{t=1}^{T_{oos}} R_{p,t}$$ رابطه 2)

T_{oos} تعداد کل دوره‌های خارج از نمونه است که در این تحقیق 61 دوره است.

- حجم معاملات[1]: متوسط تغییرات مطلق وزن پرتفولیو بین دو دوره متوالی است.

$$turnover_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \left(|w_{i,t} - w_{i,t-1}|\right)$$ رابطه 3)

که $w_{i,t}$ و $w_{i,t-1}$ به ترتیب وزن دارایی i در پرتفولیوی دوره t دوره قبل $(t-1)$ و p تعداد کل دارایی‌ها (شاخص ۳۵ صنعت) است.

- اعداد شرطی[2]: این عدد معیار جهت سنجش پایداری و حساسیت ماتریس است و نشان می‌دهد که خروجی یک محاسبه ماتریسی چقدر نسبت به تغییرات کوچک در ورودی‌ها حساس است. این عدد برای هر ماتریس از طریق نسبت بزرگترین مقدار سینگولار[3] به کوچکترین مقدار سینگولار آن ماتریس تعریف می‌شود. برای ماتریس‌های متقارن و مثبت معین مانند ماتریس کوواریانس، مقادیر سینگولار همان مقادیر ویژه[4] ماتریس هستند.

$$k(\Sigma) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{min}}$$ رابطه 4)

که $\lambda_{\max}$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس کواریانس و λ_{min} کوچکترین مقدار ویژه ماتریس کواریانس و p تعداد کل دارایی‌ها (شاخص ۳۵ صنعت). عدد شرطی پایین نشان‌دهنده خوش‌شرطی ماتریس و در نتیجه دقت بالای محاسبه معکوس آن است. برعکس، عدد شرطی بزرگ نشان‌دهنده بدشرطی ماتریس است.

مدل‌های ریاضی: در این پژوهش، از مدل‌های ریاضی زیر برای بهینه‌سازی پرتفولیو و تخمین ماتریس کوواریانس استفاده می‌شود:

---

[1] Turnover
[2] Condition numbers
[3] Singular value
[4] Eigenvalues

آماده انتشار

الف) پرتفولیوی حداقل واریانس جامع: هدف این پرتفولیو کمینه‌سازی واریانس پرتفولیو بدون در نظر گرفتن بازده مورد انتظار است. وزن‌های اوراق بهادار در پرتفولیوی مذکور با حل مسئله بهینه‌سازی زیر به دست می‌آید:

رابطه5)
$$\min_{w} \; w'\hat{\Sigma}w$$

با قید :

رابطه6)
$$w'\mathbf{1} = 1$$

که در آن w یک بردار $p\times 1$ از وزن‌های پورتفولیو، $\hat{\Sigma}$ یک برآوردگر ماتریس کوواریانس $p\times p$ دارایی‌ها، و 1 یک بردار $p\times 1$ از یک‌ها است. وزن‌های بهینه پورتفولیو به شرح زیر محاسبه می گردند:

رابطه7)
$$\hat{w} = \frac{\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$$

ب) برآوردگر ماتریس کوواریانس نمونه: ماتریس کوواریانس نمونه[1] (S) به عنوان یک برآوردگر نااریب و پرکاربرد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطه8)
$$S = \frac{1}{\mathrm{T}-1}\sum_{t=1}^{T}(r_i - \bar{r})(r_j - \bar{r})^{\mathrm{T}}$$

که:

r_i و r_j بردار بازدهی p دارایی های منفرد در زمان t

$\bar{r}$ بردار میانگین بازدهی دارایی در طول T دوره آموزش.

T تعداد مشاهدات (طول پنجره آموزش).

[1] Sample covariance matrix

ج) برآوردگر کوواریانس انقباضی خطی: برآوردگر انقباضی خطی $(\hat{\Sigma}_{\mathrm{LS}})$ یک ترکیب وزنی از ماتریس کوواریانس نمونه (S) و یک ماتریس هدف $(\hat{\Sigma}_{\mathrm{target}})$ است:

رابطه9)
$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{LS}} = (1-v)S + v\hat{\Sigma}_{\mathrm{target}}$$

که در آن $0 < v < 1$ شدت انقباض را نشان می‌دهد و $\hat{\Sigma}_{\mathrm{target}}$ ماتریس هدفی است که ماتریس کوواریانس نمونه به سمت آن منقبض می‌شود. در این پژوهش، ماتریس هدف به عنوان یک ماتریس قطری در نظر گرفته می‌شود که تنها درایه‌های روی قطر اصلی آن (واریانس‌ها) غیرصفر بوده و درایه‌های خارج از قطر (کوواریانس‌ها) صفر هستند. این ماتریس هدف، فرض می‌کند که بازدهی دارایی‌ها با یکدیگر همبستگی ندارند. ماتریس کوواریانس نمونه با وجود نااریب بودن، نوسانات بالایی دارد که به وزن‌های پورتفوی ناپایدار می‌انجامد. در شرایطی که تعداد دارایی‌ها از تعداد مشاهدات بیشتر است، ماتریس کوواریانس نمونه‌ای به دلیل ناپایداری ذاتی، دچار بزرگنمایی خطای برآورد می‌شود. این امر منجر به وزن‌های پرتفولیوی افراطی و پرنوسان شده و عملاً استفاده از آن را برای تخصیص بهینه دارایی‌ها بی‌اعتبار می‌سازد. برای اطمینان از معین مثبت بودن[1] برآوردگر کوواریانس، نیاز است که ماتریس هدف نیز این خاصیت را داشته باشد، زیرا مجموع وزنی یک ماتریس نیمه معین مثبت[2] (ماتریس نمونه‌ای) و یک ماتریس معین مثبت (ماتریس هدف)، همواره معین مثبت خواهد بود. لدوا (۱۹۹۵) استفاده از ماتریس هدف قطری را به صورت زیر پیشنهاد می‌کند که در این تحقیق نیز از آن استفاده شده است:

رابطه 10)
$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{target}} = \mathrm{Diag}(s_{11}, \dots, s_{ii}, \dots, s_{pp})$$

د) روش‌های تعیین شدت انقباض بهینه (v^*): همانگونه که گفته شد این تحقیق به مقایسه عملکرد دو روش یعنی روش کمینه سازی لگاریتم درست‌نمایی منفی و کمینه‌سازی خطای میانگین مربع نرم فروبنیوس بین ماتریس کوواریانس واقعی و کواریانس انقباضی

[1] positive definiteness
[2] positive semi-definite

برآورد شـــده جهت تعیین شـــدت بهینه انقباض می‌پردازد. مدل مورد اســـتفاده در این دو روش عبارت است از:

روش اول) کمینه‌ســـازی لگاریتم درســـت‌نمایی منفی با اعتبارســـنجی متقابل: در این روش، شـدت انقباض (υ) با کمینه‌سـازی تابع منفی لگاریتم درسـت‌نمایی (تابع هدف) بر روی داده‌های اعتبار سـنجی [1] تعیین می‌شـود. این فرآیند از طریق اعتبارسـنجی متقابل K-برابر [2] انجام می‌گیرد. به این صورت که داده‌های آموزش به K زیرمجموعه تقسیم شده و شدت انقباض بهینه‌ای انتخاب می‌شود که میانگین لگاریتم درست‌نمایی منفی را در تمامی K تکرار کمینه کند. تابع لگاریتم درسـت‌نمایی منفی برای ماتریس کوواریانس تخمینی با انقباض خطی ($\Sigma^{[-k]}$) و ماتریس کوواریانس نمونه داده‌های اعتبارســـنجی ($S^{[k]}$) به صورت زیر است:

$$\upsilon_{NLL} = \min \sum_{k=1}^{K} \operatorname{tr}\left(\left(\hat{\Sigma}^{[-k]}\right)^{-1} S^{[k]}\right) + \log\left(\det\left(\Sigma^{[-k]}\right)\right) \quad \text{رابطه 11)}$$

لازم به ذکر است tr() عملگر Trace [3] می‌باشد و det() عملگر دترمینان و υ_{NLL} شدت انقباض بهینه محاسبه شده با معیار NLL می‌باشد. کمینه کردن این مجموع معادل حداکثر کردن احتمال درست‌نمایی داده‌های اعتبارسنجی است. این روش با تقسیم داده‌ها به بخش‌های مختلف، عملکرد مدل را روی داده‌های دیده نشده ارزیابی می‌کند. هدف آن یافتن شدت انقباضی است که مدل را به بهترین شکل با توزیع آماری داده‌ها منطبق کند (شی و همکاران، 2025).

روش دوم) کمینه‌سازی خطای فروبنیوس [4]: این روش، شدت انقباض را با کمینه‌سازی فاصـله (با اسـتفاده از نُرم فروبنیوس) بین ماتریس کوواریانس واقعی و ماتریس کوواریانس

---

[1] Validation Set

[2] K-fold cross-validation

[3] اثر یک ماتریس نامیده می‌شود و به مجموع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی گفته می‌شود.

[4] Frobenius loss minimization

انقباضی برآورد شده، تعیین می‌کند. این مقدار به صورت تحلیلی و با استفاده از مدل ارائه شده توسط لدوا و ولف (2004) محاسبه می‌شود[1]:

$$v_F = \frac{\sum_{t=1}^{T} ||(r_i - \bar{r})(r_j - \bar{r})^{\mathrm{T}} - \mathrm{S}||^2}{\mathrm{T} * ||\mathrm{S} - \hat{\Sigma}_{\mathrm{target}}||^2} \quad \text{رابطه 12)}$$

که در آن $||\cdot||$ نشان‌دهنده نُرم فروبنیوس و v_F شدت انقباض بهینه محاسبه شده با معیار فروبنیوس می‌باشد. صورت کسر، نویز و نوسانات ماتریس کوواریانس نمونه را اندازه‌گیری می‌کند. به طور دقیق‌تر، این قسمت مجموع فاصله بین کوواریانس‌های لحظه‌ای (محاسبه‌شده از بازده ماهیانه) و ماتریس کوواریانس کلی نمونه را محاسبه می‌کند. هرچه این مقدار بزرگ‌تر باشد، نشان می‌دهد که ماتریس نمونه نویز و بی‌ثباتی بیشتری دارد. مخرج کسر، فاصله بین ماتریس کوواریانس نمونه و ماتریس هدف را اندازه‌گیری می‌کند. v_F در واقع میزان نویز در ماتریس نمونه به فاصله آن از ماتریس هدف می‌باشد. این مقدار نشان دهنده این است که براساس داده‌ها، چقدر باید ماتریس نمونه به سمت ماتریس هدف منقبض شود. در فرآیند انقباض مبتنی بر نرم فروبنیوس، ماتریس هدف به‌صورت یک ماتریس قطری با عناصر قطر اصلی برابر با واریانس نمونه‌ای هر صنعت و عناصر خارج قطر برابر با صفر در نظر گرفته شده است.

یافته‌های پژوهش

این بخش به ارائه آمار توصیفی، رفتار شدت انقباض، بررسی شدت انقباض بهینه و عدد شرطی، میانگین وزن‌های پرتفولیو در طول زمان برای هر صنعت تجربی حاصل از شبیه‌سازی پنجره غلطان و مقایسه عملکرد خارج از نمونه پورتفولیوهای حداقل واریانس جامع می‌پردازد که بر پایه سه روش مختلف تخمین ماتریس کوواریانس نمونه، انقباضی لگاریتم درست‌نمایی منفی و انقباضی فروبنیوس ساخته شده‌اند.

---

[1] روش کمینه‌سازی خطای فروبنیوس در این پژوهش، در واقع همان چارچوب نظری کلاسیک برآوردگر انقباضی معرفی‌شده توسط لدوا و ولف (2003, 2004) است که در این مقاله با اصطلاح ماتریسی آن به‌کار رفته است.

آمار توصیفی: توصیف آماری بازده صنایع مورد استفاده در پژوهش در جدول (1) آورده شده است.

جدول1. آمار توصیفی متغیرهای پژوهش

صنایع	تعداد مشاهدات	میانگین	انحراف معیار	حداقل	حداکثر
کانه فلزی	101	0/0343	0/1191	-0/2505	0/5174
سایر معادن	101	0/0318	0/2203	-0/4171	0/5706
منسوجات	101	0/0348	0/1495	-0/2772	0/5173
محصولات چرمی	101	0.0284	0.2290	-0.5204	1/2108
محصولات چوبی	101	0/0189	0/1765	-0/4565	0/4751
محصولات کاغذی	101	0/0156	0/1580	-0/3404	0/4847
انتشار و چاپ	101	0/0260	0/1713	-0/4431	0/5900
فرآورده نفتی	101	0/0178	0/5982	-2/2802	2/2379
لاستیک	101	0/0367	0/1448	-0/2714	0/5120
فلزات اساسی	101	0.0393	0.1186	-0.2509	0/5752
محصولات فلزی	101	0/0179	0/1431	-0/2779	0/5088
ماشین‌آلات	101	0/0330	0/1338	-0/2425	0/4723
دستگاه‌های برقی	101	0/0282	0/1244	-0/2822	0/4917

آماده انتشار

صنایع	تعداد مشاهدات	میانگین	انحراف معیار	حداقل	حداکثر
وسایل ارتباطی	101	0/0262	0/2106	-0/7202	0/7188
خودرو	101	0/0307	0/1652	-0/4291	0/6401
قند و شکر	101	0/0366	0/1235	-0/1862	0/5111
چند رشته‌ای صنعتی	101	0/0394	0/1218	-0/1652	0/5901
تأمین آب، برق، گاز	101	0/0364	0/1111	-0/2186	0/4389
غذایی به جز قند	101	0/0292	0/1282	-0/2893	0/4932
مواد دارویی	101	0/0303	0/1132	-0/1995	0/4393
شیمیایی	101	0/0394	0/1094	-0/1678	0/5333
خرده فروشی به جز وسایل نقلیه	101	0/2609	0/4060	-0/1777	1/1601
کاشی و سرامیک	101	0/0349	0/1397	-0/3056	0/5767
سیمان	101	0/0425	0/1265	-0/2729	0/4561
کانی غیرفلزی	101	0/0319	0/1272	-0/2531	0/5183
بانک‌ها	101	0/0328	0/1139	-0/2000	0.4953
سایر مالی	101	0/0189	0/1327	-0/3170	0/4147
حمل و نقل	101	0/0307	0/1683	-0/4428	0/5386
رادیویی	101	0/0194	0/1309	-0/4539	0/3646

آماده انتشار

صنایع	تعداد مشاهدات	میانگین	انحراف معیار	حداقل	حداکثر
بیمه و بازنشسته	101	0/0316	0/1259	-0/2657	0/5563
اداره بازارهای مالی	101	0/0286	0/1326	-0/2745	0/5840
انبوه سازی	101	0/0288	0/1478	-0/3107	0/5641
رایانه	101	0/0243	0/1049	-0/2889	0/5258
اطلاعات و ارتباطات	101	0/0717	0/2648	-0/2530	1/1250
فنی مهندسی	101	0/0255	0/1573	-0/3771	0/5082

با توجه به جدول (1) نوسانات قابل توجهی میان پارامترها در صنایع مختلف مشاهده می‌شود. برای مثال، صنایع فرآورده نفتی و خرده‌فروشی با انحراف معیار بالا (به ترتیب 0/5982 و 0/4060) و دامنه نوسان گسترده (تفاوت بین حداقل و حداکثر)، بالاترین ریسک را نشان می‌دهند. در مقابل، صنایع مانند رایانه (0/1049) و شیمیایی (0/1094) دارای کمترین انحراف معیار هستند که نشان‌دهنده پایداری و ریسک کمتر آن‌هاست. بنابراین، با فرض بهینه‌سازی سبد سهام با هدف حداقل واریانس جامع، صنایع کم‌نوسان مانند رایانه و شیمیایی سهم بیشتری در پرتفولیوی خواهند داشت. همچنین، وجود صنایع با نوسان بسیار بالا (مانند فرآورده نفتی) چالش بزرگی در تخمین ماتریس کوواریانس ایجاد می‌کند. در چنین شرایطی، رویکرد برآوردگرهای انقباضی می‌تواند با تعدیل مقادیر پرت (شاخه‌ای) و نزدیک کردن آن‌ها به میانگین کل نمونه، به بهبود ثبات و دقت ماتریس کوواریانس کمک کند و نتایج قابل اطمینانی در بهینه‌سازی ارائه دهد.

آماده انتشار

رفتار شدت انقباض: برای بررسی پویایی شدت انقباض در طول زمان و تأثیر شرایط متغیر بازار بر آن، از روش پنجره غلتان استفاده شد. نحوه عملکرد این روش به این صورت است که ابتدا یک پنجره زمانی با طول ثابت (۶۰ ماه) تعریف می‌شود. سپس، کد از اولین پنجره داده (شامل ۶۰ ماه ابتدایی) شروع به کار کرده و با استفاده از دو روش تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی و خطای فروبنیوس، دو مقدار شدت انقباض را برای آن دوره محاسبه می‌کند. این مقادیر به عنوان برآورد شدت انقباض برای تاریخ انتهای آن پنجره در نظر گرفته می‌شوند. در ادامه، پنجره تحلیل به صورت گام به گام (هر بار یک ماه) در طول زمان حرکت کرده و این فرآیند به صورت تکراری برای هر دوره جدید تکرار می‌شود. با این رویکرد، یک سری زمانی از مقادیر شدت انقباض به دست می‌آید که نوسانات آن در شکل (1) به تصویر کشیده شده است. هر نقطه روی نمودار، برآورد شدت انقباض را برای تاریخ مربوطه نشان می‌دهد که براساس عملکرد ۶۰ ماه گذشته بازار محاسبه شده است.

شکل 1. شدت انقباض در طول زمان



رفتار شدت انقباض که با بکارگیری دو روش فوق بدست آمده در جدول 2 خلاصه و جمع بندی شده است.

جدول2. رفتار شدت انقباض

روش‌ها	میانگین	انحراف معیار	حداقل	25%	50%	75%	حداکثر
تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی	0/2283	0/0212	0/1999	0/2147	0/2254	0/235	0/2941
فروبنیوس	0/2437	0/0957	0/1365	0/1721	0/2363	0/2893	0/5365

میانگین شـــدت انقباض، میانگین مقادیری اســـت که به صـــورت پویا و در یک پنجره غلتان محاسبه می‌شوند. کاربرد اصلی این میانگین، توصیف رفتار کلی و متوسط شدت انقباض در طول زمان است و نشان می‌دهد که بازار در اغلب اوقات به چه میزان انقباضی نیاز داشته است. مقایسه میانگین شدت انقباض نشان می‌دهد که در هر دو روش تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی (حدود 0/23) و خطای فروبنیوس (حدود 0/24)، مقادیر بسیار به یکدیگر نزدیک هستند. مقدار غیرصفر شدت انقباض، به وضوح اهمیت رویکرد انقباضی را در برابر استفاده صرف از ماتریس کوواریانس نمونه‌ای تأیید می‌کند. با این حال، روش خطای فروبنیوس با انحراف معیار بالاتر (0/0957) نسبت به روش تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی با انحراف معیار (0/0212) نشان می‌دهد که برآوردهای شدت انقباض آن در طول زمان نوسان بیشتری داشته و به تغییرات شرایط بازار حساس‌تر است. از سوی دیگر، روش تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی یک برآورد پایدارتر و هموارتر از شدت انقباض ارائه می‌دهد که ممکن اســـت برای کاربردهای عملی، به ویژه در دوره‌های پرنوســـان، مطلوب‌تر باشد. در نهایت، می‌توان نتیجه گرفت که نتایج به‌دست‌آمده به وضوح نشان می‌دهد که ماتریس کوواریانس نمونه برای تحلیل پرتفولیوی در دوره مورد بررســـی به تنهایی کافی نبوده و نیاز به تعدیل دارد. با این وجود، انتخاب روش مناســـب برای برآورد شـــدت انقباض، تأثیر قابل توجهی بر پایداری و دقت نهایی این برآورد دارد که باید در بهینه‌سازی سبد سهام مد نظر قرار گیرد.

بررسی شدت انقباض بهینه و عدد شرطی: نتایج حاصل از بررسی شدت انقباض از طریق اعداد شرطی در جدول(3) آورده شده است.

جدول3. شدت انقباض بهینه و عدد شرطی با استفاده از سه روش

معیار	ماتریس کوواریانس نمونه‌ای	تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی	فروبنیوس
شدت انقباض بهینه	-	0/1646	0/2239
عدد شرطی	1157	142	108

نتایج نشـان می‌دهد که ماتریس نمونه‌ای دارای یک عدد شـرطی بسـیار بالا (1157) اسـت که این نشـان‌دهنده بی‌ثباتی شـدیدی اسـت که منجر به تولید وزن‌های افراطی و غیرمعقول برای پرتفولیوی می‌شود. برای حل این مشکل، شدت انقباض بهینه با استفاده از دو روش تابع منفی درسـت‌نمایی لگاریتمی (با مقدار 0/1646) و خطای فروبنیوس (با مقدار 0/2239) محاسبه شد. مقادیر غیرصفر این شدت انقباض، ضرورت تعدیل ماتریس نمونه‌ای را تأیید می‌کند. اسـتفاده از ماتریس‌های کوواریانس انقباضـی، عدد شـرطی را به شـدت کاهش داده و به ترتیب به عدد 142 برای تابع منفی درسـت‌نمایی لگاریتمی و عدد 108 برای خطای فروبنیوس رسانده اسـت. این یافته‌ها، اهمیت به‌کارگیری برآوردگرهای انقباضی برای بهینه‌سازی سبد سهام در شرایط بازار با داده‌های محدود نشان می‌دهند. لازم به ذکر اسـت، شـدت انقباض بهینه یک مقدار واحد و ثابت اسـت که از طریق بهینه‌سـازی روی کل داده‌های موجود (۱۰۱ ماه) به دسـت آمده اسـت و برای سـاخت نهایی پرتفولیوی به کار می‌رود. این مقدار نشـان‌دهنده بهترین میزان انقباض برای کل دوره مورد بررسـی است.

نتایج شـبیه‌سـازی پنجره غلتان برای بررسـی عملکرد سـه روش تخمین ماتریس کوواریانس نمونه‌ای، انقباضـی تابع منفی درسـت‌نمایی لگاریتمی و انقباضـی خطای فروبنیوس بر روی میانگین وزن‌های پورتفوی حداقل واریانس جامع در جدول (4) ارائه شده است. این شبیه‌سازی با طول پنجره ۴۰ ماه و در ۶۱ دوره ارزیابی خارج از نمونه انجام شده است.

همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، وزن‌های محاسبه شده با استفاده از ماتریس کوواریانس نمونه‌ای، رفتاری بسیار افراطی و غیرعملی از خود نشان می‌دهند. این روش به برخی از صنایع وزن‌های بسیار زیاد و نامتوازن (مثلاً صنعت شیمیایی با میانگین وزن 0/797 یا صـنعت دارویی با 0/626) و به برخی دیگر وزن‌های منفی و بزرگ (مانند صـنعت

لاستیک با 0/257-) اختصاص داده است. این تمرکز شدید بر روی تعداد محدودی از صنایع و نیاز به فروش استقراضی گسترده، نشان‌دهنده بی‌ثباتی شدید ماتریس کوواریانس نمونه‌ای است. در مقابل، روش‌های انقباضی تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی و انقباضی خطای فروبنیوس به طور چشمگیری وزن‌های پرتفولیو را تعدیل کرده‌اند. در این روش‌ها، وزن‌ها به صورت متوازن‌تر و معقول‌تری بین ۳۵ دارایی توزیع شده‌اند. برای مثال، وزن صنعت شیمیایی که در روش نمونه‌ای تقریباً 80 درصد بود، در روش‌های انقباضی به حدود ۱۱ الی ۱۲ درصد کاهش یافته است. این کاهش شدید در افراطی بودن وزن‌ها، حاکی از این است که برآوردگرهای انقباضی به دلیل تثبیت ماتریس کوواریانس، یک سبد سهام متنوع‌تر و پایدارتر ایجاد می‌کنند. در نهایت، نتایج شبیه‌سازی پنجره غلتان به وضوح نشان می‌دهد که در یک محیط پویا، روش‌های انقباضی ابزاری حیاتی برای ساخت پرتفولیوی‌های حداقل واریانس جامع هستند که نه تنها به لحاظ نظری بلکه در عمل نیز وزن‌های پایدار، منطقی و قابل مدیریتی را ارائه می‌دهند. این یافته، برتری عملی رویکردهای انقباضی را نسبت به روش‌های کلاسیک تأیید می‌کند.

جدول4. میانگین وزن‌های پورتفولیو در طول زمان برای هر صنعت با استفاده از سه روش

ردیف	دارایی (صنعت)	ماتریس کوواریانس نمونه‌ای	تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی	فروبنیوس
1	کانه فلزی	-0/1932	0/0299	0/0471
2	سایر معادن	-0/1226	-0/0505	-0/0447
3	منسوجات	0/1607	0/1612	0/1510
4	محصولات چرمی	-0/0076	0/0249	0/0191
5	محصولات چوبی	0/0605	0/0256	0/0331
6	محصولات کاغذی	0/0031	-0/0083	-0/0058
7	انتشار و چاپ	-0/2423	-0/0437	-0.0357
8	فرآورده نفتی	-0/1738	-0/0066	-0/0106
9	لاستیک	-0/2578	-0/0802	-0/0908
10	فلزات اساسی	-0/0584	0/0498	0/0253

ردیف	دارایی (صنعت)	ماتریس کوواریانس نمونه‌ای	تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی	فروبنیوس
11	محصولات فلزی	-0/1603	-0/0486	-0.0321
12	ماشین‌آلات	-0/1476	-0/0659	-0/0471
13	دستگاه‌های برقی	-0/2462	-0/0063	0/0031
14	وسایل ارتباطی	0/0595	-0/0289	-0/0246
15	خودرو	0/0746	-0/0291	-0/0266
16	قند و شکر	-0/0717	0/0958	0/1054
17	چند رشته‌ای صنعتی	-0/1844	0/0625	0/0551
18	تأمین آب، برق، گاز	-0/0061	0/1159	0/1403
19	غذایی به جز قند	0/0898	0/0271	0/0319
20	مواد دارویی	0/6267	0/1442	0/1462
21	شیمیایی	0/7973	0/1172	0/1121
22	خرده فروشی به جز وسایل نقلیه	0/2288	0/2242	0/1852
23	کاشی و سرامیک	0/5397	0/1162	0/1123
24	سیمان	0/1098	-0/0006	0/0074
25	کانی غیرفلزی	-0/3913	0/0146	0/0312
26	بانک‌ها	0/2573	0/1097	0/0900
27	سایر مالی	0/1363	0/0212	0/0229
28	حمل و نقل	-0/1516	-0/0820	-0/0747
29	رادیویی	0/2426	0/0252	0/0408
30	بیمه و بازنشسته	-0/2093	-0/0025	-0/0147
31	اداره بازارهای مالی	-0/0116	0/0626	0/0352
32	انبوه سازی	-0/0122	-0/0777	-0/0640
33	رایانه	0/5149	0/1510	0/1259
34	اطلاعات و ارتباطات	0/0097	0/0359	0/0231
35	فنی مهندسی	-0/2633	-0/0840	-0/0727
	جمع	1	1	1

آماده انتشار

با بررسی میانگین وزن‌های تخصیص‌یافته در طول زمان در جدول 4، تفاوت ساختاری معناداری میان روش کلاسیک (نمونه) و روش‌های انقباضی مشاهده می‌شود. روش نمونه‌ای به دلیل خطای برآورد در ماتریس کوواریانس، دچار «توزیع نامتوازن» و «تمرکز شدید وزن‌ها است؛ به‌طوری‌که در برخی صنایع (مانند شیمیایی با وزن حدود ۸۰ درصد یا کانی غیرفلزی با وزن منفی ۳۹ درصد)، وزن‌های غیرمنطقی و شدیدی ایجاد کرده است که اجرای واقعی آن در بازار با محدودیت‌های نقدینگی و ریسک تک‌سهم مواجه است. در مقابل، برآوردگرهای انقباضی با تعدیل ماتریس کوواریانس، وزن‌ها را به صورت متوازن‌تری توزیع کرده‌اند. این روش‌ها با حذف وزن‌های شدید و منفی غیرمتعارف، تخصیص سرمایه را به سمت سبدی متنوع‌تر سوق داده‌اند. برای مثال، در صنعت شیمیایی، برآوردگرهای انقباضی با کاهش وزن از حدود ۸۰ درصد به بازه ۱۰ تا ۱۲ درصد، ریسک تمرکز را به شدت کاهش داده و پایداری پرتفولیو را تضمین کرده‌اند. این توزیع متوازن‌تر وزن‌ها توسط روش‌های انقباضی، نشان‌دهنده توانایی این مدل‌ها در شناسایی وزن‌های بهینه بدون سوگیری ناشی از نویز در داده‌های کوواریانس است که می‌تواند مبنایی برای تصمیم‌گیری در تشکیل پرتفوی‌های متنوع باشد.

ارزیابی: به منظور ارزیابی عملکرد خارج از نمونه روش‌های مختلف برآورد ماتریس کوواریانس، یک شبیه‌سازی پنجره غلطان با طول پنجره ۴۰ ماه انجام شد. نتایج این شبیه‌سازی به صورت مستقیم نشان‌دهنده اثربخشی روش‌های انقباضی در دستیابی به اهداف اصلی پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع است. نتایج کلیدی مربوط به عملکرد خارج از نمونه پرتفولیوها، شامل واریانس خارج از نمونه و حجم معاملات(گردش مالی)، در جداول (5) خلاصه شده‌اند:

جدول5. ارزیابی عملکرد با استفاده از سه روش

معیار	ماتریس کوواریانس نمونه‌ای	تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی	فروبنیوس
گردش مالی خارج از نمونه	3/8900	0/2488	0/1843
واریانس خارج از نمونه	0/1065	0/0065	0/0069
انحراف معیار- درصد	32/64	8/11	8/32

نسبت شارپ	0/1133	0/5508	0/5884

با استفاده از نتایج حاصل از تحلیل عملکرد خارج از نمونه پرتفولیوها، فرضیات پژوهش را می‌توان بصورت زیر مورد آزمون قرار داد:

-آزمون فرضیه اصلی اول: همان‌طور که مشاهده می‌شود، پرتفولیوی مبتنی بر ماتریس کوواریانس نمونه(رویکرد سنتی)، دارای واریانس خارج از نمونه بالاتری (0/1065) نسبت به پرتفولیوهای شکل گرفته بر اساس روش‌های انقباضی با تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی(0/0065) و کمینه سازی خطای فروبنیوس(0/0069) می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که انحراف معیار بازده پرتفولیو نیز از عدد 32/64 برای پرتفولیوهای مبتنی بر کواریانس نمونه (رویکرد سنتی) به عدد 8/11 برای پرتفولیوهای انقباضی مبتنی بر تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی و عدد 8/32 برای پرتفولیوهای انقباضی مبتنی بر کمینه سازی خطای فروبنیوس کاهش یافته است که این نشان‌دهنده موفقیت برآوردگرهای انقباضی در تثبیت ماتریس کوواریانس و ارائه یک پرتفولیوی با ریسک بسیار پایین‌تر و پایدارتر و تأیید فرضیه اصلی اول می‌باشد.

- آزمون فرضیه فرعی اول: با مقایسه واریانس دو روش انقباضی، مشخص می‌شود که پورتفوی مبتنی بر روش لگاریتم درست‌نمایی منفی واریانس پایین‌تری نسبت به روش خطای فروبنیوس دارد. این تفاوت، هرچند کوچک، نشان می‌دهد که عملکرد روش انقباضی تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی در کاهش واریانس، اندکی بهتر از روش خطای فروبنیوس بوده و بنابراین، فرضیه فرعی اول نیز تأیید می‌شود.

-آزمون فرضیه اصلی دوم: از نظر حجم معاملات (گردش مالی) نیز مشاهده می‌شود که پرتفولیوی مبتنی بر ماتریس نمونه‌ای (رویکرد سنتی) مستلزم حجم معاملات (گردش مالی) خارج از نمونه بالایی (3/89) نسبت به پرتفولیوهای با کواریانس‌های انقباضی مبتنی بر تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی (0/2488) و پرتفولیوهای با کواریانس‌های انقباضی با خطای فروبنیوس(0/1843) می‌باشد. دلیل چنین اختلافی این است که در پرتفولیوهای مبتنی بر رویکرد سنتی به دلیل تغییرات شدید در وزن‌های پرتفولیوی در هر دوره ارزیابی معاملات بیشتر و در نتیجه هزینه بیشتری تحمیل می‌گردد، در صورتی که در پرتفولیوهای انقباضی به

دلیل پایداری بالاتر وزن‌ها، حجم معاملات و به تبع آن هزینه های معاملاتی بسیار کمتر خواهد بود.

در نهایت، بررسی «نسبت شارپ» که معیار برای ارزیابی عملکرد تعدیل‌شده با ریسک پرتفوی است، نشان می‌دهد که پرتفوی‌های مبتنی بر روش‌های انقباضی، برتری نسبت به روش سنتی (ماتریس نمونه‌ای) دارند. همان‌طور که در جدول (۵) ملاحظه می‌شود، نسبت شارپ پرتفوی مبتنی بر ماتریس نمونه‌ای برابر با 0/1133 است، در حالی که این رقم برای روش‌های انقباضی مبتنی بر تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی (0/5508) و کمینه سازی خطای فروبنیوس (0/5884) به طور معناداری بالاتر است. دلیل این تفاوت، اثر هم‌افزایی «کاهش ریسک» و «کاهش هزینه‌های معاملاتی» در روش‌های انقباضی است. در رویکرد سنتی، واریانس پرتفوی و گردش مالی بالا منجر به تحمیل هزینه‌های سنگین معاملاتی می‌شود که عملاً بخش بزرگی از بازدهی را فرسایش داده و عملکرد نهایی (نسبت شارپ) را به شدت تنزل می‌دهد. در مقابل، روش‌های انقباضی با تثبیت وزن‌ها، نه تنها ریسک را مدیریت کرده‌اند، بلکه با کاهش گردش مالی، بازدهی خالص بالاتری را برای سرمایه‌گذار به ارمغان آورده‌اند. در میان دو روش انقباضی نیز، برتری جزئی روش «خطای فروبنیوس» در نسبت شارپ، متأثر از گردش مالی کمتر این روش است که نشان‌دهنده کارایی بالاتر آن در کنترل اصطکاک‌های بازار می‌باشد.

آماده انتشار

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش با هدف ارتقاء عملکرد پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع در بازار سرمایه ایران، به بررسی و مقایسه کارایی برآوردگرهای کوواریانس انقباضی خطی با ماتریس کوواریانس نمونه پرداخته شده است. یافته‌ها نشان دادند که استفاده از ماتریس کوواریانس نمونه (رویکرد سنتی) برای تشکیل پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع، به دلیل نوسانات و خطاهای برآورد قابل توجه، عملکرد خارج از نمونه ضعیفی دارند. این پرتفولیوها بالاترین واریانس و حجم معاملات در خارج از نمونه را دارا هستند، و درنتیجه کاربرد آن‌ها را در یک محیط با ابعاد بالا، مانند بازارسرمایه ایران، ناممکن می‌باشد.

همچنین مشاهده شد که دو رویکرد انقباضی شامل تابع منفی درست‌نمایی لگاریتمی و خطای فروبنیوس با کاهش واریانس خارج از نمونه و کاهش حجم معاملات، عملکرد پرتفولیوی حد اقل واریانس جامع را به طور قابل توجهی بهبود می‌بخشند.

یافته‌های این پژوهش با نتایج پژوهش‌های پیشین در این حوزه مانند پژوهش‌های لدوا و ولف (2003، 2004 الف، 2004 ب) و همچنین پژوهش‌های جاگانناتان و ما (2003) و دِمیگوئل و همکاران (2009 الف) و شی و همکاران (2025) که به چالش‌های برآورد پارامترها و مزایای روش‌های مقاوم‌تر (مانند انقباض یا محدودیت‌های وزنی) اشاره کرده‌اند، مطابقت دارد. براساس نتایج این پژوهش، به مدیران پرتفولیو و سرمایه‌گذاران نهادی در بازار سرمایه ایران توصیه می شود با صرف نظر کردن از ماتریس کوواریانس نمونه سنتی، استفاده از برآوردگرهای کوواریانس انقباضی خطی در استراتژی‌های بهینه‌سازی پرتفولیوی را در اولویت قرار دهند. با وجود دستاوردهای پژوهش، محدودیت‌هایی در مسیر تحقیق وجود داشت که نقطه شروع مطالعات آینده را مشخص می کند:

- عبور از مدل‌های خطی: محدودیت این پژوهش، تمرکز بر روش‌های انقباضی خطی بود. با توجه به پیچیدگی‌های غیرخطی بازارهای مالی، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، از برآوردگرهای انقباضی غیرخطی و مدل‌های یادگیری ماشین (مانند خودرمزگذارهای شرطی) برای تخمین کوواریانس استفاده شود.

- پویاسازی ماتریس هدف: در این پژوهش، از ماتریس‌های هدف ثابتی استفاده شد. پیشنهاد می‌شود محققان آتی،ماتریس‌های هدف پویا مبتنی بر مدل‌های عاملی را آزمون کنند تا پایداری ماتریس کوواریانس در شرایط مختلف بازار دقیق‌تر تحلیل شود.
- تحلیل داده‌های با فرکانس بالا و افزایش دقت و پایداری در برآورد شدت انقباض: از آنجا که داده‌های پژوهش حاضر ماهانه بوده است، بسیاری از نوسانات کوتاه‌مدت بازار پنهان مانده‌اند. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های بعدی از داده‌های روزانه یا درون‌روزانه‌ای[1] استفاده شود تا پویایی‌های ماتریس کوواریانس در فواصل زمانی کوتاه‌تر و واکنش آن به شوک‌های بازار، با دقت بیشتری ارزیابی گردد. بهره‌گیری از داده‌های با فرکانس بالا، می‌تواند به عنوان راهکاری برای کاهش نویز نمونه‌گیری و افزایش دقت و پایداری در برآورد شدت انقباض در مطالعات آینده مورد بررسی قرار گیرد.
- طول پنجره و پایداری رژیم و استفاده از پنجره‌های غلطان تطبیقی: عملکرد برآوردگرهای انقباضی، تابعی از طول پنجره آموزشی است. با توجه به ماهیت بازارهای نوظهور و احتمال وقوع تغییرات ساختاری در رژیم‌های معاملاتی، پایداری ضرایب انقباض در طول زمان می‌تواند دستخوش تغییر گردد. به کارگیری پنجره‌های آموزشی با طول متغیر که اندازه‌ی آن‌ها به‌صورت درون‌زا و متناسب با شدت نوسانات بازار یا نتایج آزمون‌های تشخیص شکست ساختاری به‌روزرسانی می‌شود.
- محدودیت ناشی از عدم به‌کارگیری مدل‌های ناهمسانی شرطی رسمی: به‌کارگیری رویکرد پنجره غلتان اگرچه تعدیل تجربی مناسبی برای پویایی پارامترها در طول زمان فراهم می‌آورد، اما یک مدل ناهمسانی واریانس شرطی رسمی به شمار نمی‌رود. این رویکرد تغییرات کوواریانس را صرفاً از طریق جابه‌جایی بازه‌های زمانی تقریب می‌زند، در حالی که مدل‌های رسمی ناهمسانی

[1] High-frequency data

شرطی ساختار تئوریک مشخصی برای تفکیک اثر شوک‌ها و پایداری نوسانات دارند. از این‌رو، اتکای صـــرف به پنجره غلتان به عنوان یک روش تجربی و عدم تصریح مدل‌های ناهمسانی شرطی، یکی از محدودیت‌های روش‌شناختی پژوهش حاضر است.

تعارض منافع

مقاله حاضر مستخرج از طرح پژوهشی درون دانشگاهی (از نوع الف) در دانشگاه سمنان با عنوان"مقایسه کارائی برآوردگرهای کواریانس انقباضی در بهینه سازی عملکرد پرتفولیوهای حداقل واریانس جامع در بازار سرمایه ایران" با شماره قرارداد 14051331 ط 226/1405 به تاریخ 1405/06/16می‌باشد.

ORCID

Gholamhossein Golarzi https://orcid.org/0000-0002-0677-7422

Yadollah Heyvadi https://orcid.org/0009-0004-6435-5094

آماده انتشار

منابع

1. طهرانی‌پور، ع. ا.، دیده خانی، ح.، نادریان، آ.، و عباسی، ا. (1401). طراحی الگوی بهینه‌سازی سبد اعتباری در صنعت بانکداری با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، 13(50)، 210–229. https://sanad.iau.ir/en/Journal/fej/Article/1078846

References

2. Bian, Z., Liao, Y., O'Neill, M., Shi, J., & Zhang, X. (2020). Large-scale minimum variance portfolio allocation using double regularization. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 116, 103939. https://doi.org/10.1016/j.jedc.2020.103939
3. Bodnar, Taras & Mazur, Stepan & Okhrin, Yarema, 2017. "Bayesian estimation of the global minimum variance portfolio," *European Journal of Operational Research*, Elsevier, vol. 256(1), pages 292-307. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.044
4. DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J., & Uppal, R. (2009a). A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. *Management Science*, 55(5), 798–812. https://doi.org/10.1287/mnsc.1080.0986
5. Engle, R. F., Ledoit, O., & Wolf, M. (2019). Large dynamic covariance matrices. *Journal of Business & Economic Statistics*, 37(2), 363–375. https://doi.org/10.1080/07350015.2017.1345683
6. Frost, P. A., & Savarino, J. E. (1986). An empirical Bayes approach to efficient portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(3),293–305. https://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:jfinqa:v:21:y:1986:i:03:p:293-305_01
7. Frost, P.A. and Savarino, J.E. (1988) For Better Performance: Constrain Portfolio Weights. *Journal of Portfolio Management*, 15, 29-34. https://doi.org/10.3905/jpm.1988.409181
8. Golosnoy, V., Schmid, W., Seifert, M. I., & Lazariv, T. (2020). Statistical inferences for realized portfolio weights. *Econometrics and Statistics*, 14, 49–62. https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2018.08.003
9. Hansson, A. (2026). Nonlinear asset covariance prediction conditioned on the financial environment [Master's thesis, Lund University]. *Centre for Mathematical Sciences*, LUTFMS-3574-2026. https://lup.lub.lu.se/student-papers/search/publication/9246345

10. Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps. *Journal of Finance*, 58, 1651–1683. https://doi.org/10.1111/1540-6261.00580
11. Jiang, C., Du, J., & An, Y. (2019). Combining the minimum-variance and equally-weighted portfolios: Can portfolio performance be improved? *Economic Modelling*, 80, 260–274. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2018.11.012
12. Jobson, J. D., & Korkie, B. (1980). Estimation of Markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, 75, 544–554. https://doi.org/10.1080/01621459.1980.10477507
13. Klein, R., & Bawa, V. (1976). The effect of estimation risk on optimal portfolio choice. *Journal of Financial Economics*, 3, 215–231. https://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v3y1976i3p215-231.html
14. Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10, 603–621. https://doi.org/10.1016/S0927-5398(03)00007-0
15. Ledoit, O., & Wolf, M. (2004a). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. The Journal of Portfolio Management, 30(4), 110–119. https://doi.org/10.3905/jpm.2004.110
16. Ledoit, O., & Wolf, M. (2004b). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88(2), 365–411. https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4
17. Lu, C., Ndiaye, P. M., & Simaan, M. (2024). Improved estimation of the correlation matrix using reinforcement learning and text-based networks. *International Review of Financial Analysis*, 96, 103572. https://doi.org/10.1016/j.irfa.2024.103572
18. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, 77–91. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
19. Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, 8, 323–361. https://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v8y1980i4p323-361.html
20. Michaud, Richard O., The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? (1989). *Financial Analysts Journal*, 1989, http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2387669
21. Shi, F., Shu, L., He, F., & Huang, W. (2025). Improving minimum-variance portfolio through shrinkage of large covariance matrices. *Economic Modelling*, 144, 106981. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2024.106981

22. Shi, F., Shu, L., Yang, A., & He, F. (2020). Improving minimum-variance portfolios by alleviating overdispersion of eigenvalues. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 55(8), 2700–2731. https://doi.org/10.1017/S0022109019000899
23. Thomas Conlon, John Cotter and Iason Kynigakis. "Asset allocation with factorbased covariance matrices". In: *European Journal of Operational Research* 325.1 (2025), pp. 189–203. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2025.03.015
24. Wang, J., Chen, X., & Wu, Y. (2025). Shrinkage estimation of higher-order comoment matrices: Is complexity always better than simplicity?. *Finance Research Letters*, 85, 107978. https://doi.org/10.1016/j.frl.2025.107978
25. Wang, C., Papailias, F., & Ventre, C. (2026). Dynamic estimation of sample covariance matrices via hierarchical clustering. *Quantitative Finance*, 26(1), 41–62. https://doi.org/10.1080/14697688.2025.2599892
26. Xu, Y., & Li, W. (2026). Tests for the significance of a correlation matrix via l_p-norms in high-dimensions. *Journal of Multivariate Analysis*, 211, 105619. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2026.105619

References [In Persian]

1. Tehranipour, A. A., Didehkhani, H., Naderian, A., & Abbasi, E. (2022). Designing a credit portfolio optimization model in the banking industry using a meta-innovative algorithm. *Financial Engineering and Securities Management, 13*(50), 210–229. https://sanad.iau.ir/en/Journal/fej/Article/1078846

استناد به این مقاله: نام خانوادگی نویسنده اول، نام. (سال). عنوان مقاله. *عنوان نشریه (ایتالیک)*، سال(شماره)، ص آغاز-ص پایان.

Name of Journal is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

آماده انتشار