فصلنامه علمی – پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی – سال دوازدهم، شماره ۳۵، زمستان ۹۳

صفحات ۸۳ – ۱۲۱

مدل تصمیم‌گیری سازشی بر اساس روش TOPSIS برای مسایل برنامه‌ریزی چند هدفه غیرخطی با مقیاس بزرگ و ساختار بلوکی زاویه‌دار تحت شرایط عدم قطعیت

مقداد سلیمی[۱]، بهروز افشارنجفی[۲]، بهنام وحدانی[۳]

(دریافت ۹۲/۹/۳۰ پذیرش:۹۳/۲/۱)

چکیده:

هدف از این مقاله، ارائه یک رویکرد سازشی به منظور حل مسائل برنامه ریزی چندهدفه مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه دار تحت شرایط عدم قطعیت می‌باشد. با بهره گیری از این روش، یک مساله با ابعاد بزرگ به چندین مساله با ابعاد کوچکتر تجزیه می گردد. سپس با به کار بردن روش تاپسیس و و تشکیل توابعی که نشان دهنده میزان دوری از ایده‌آل‌های منفی و میزان نزدیکی به ایده‌آل‌های مثبت می باشند، هریک از مسائل تجزیه شده را به طور مستقل از دیگر توابع حل می کنیم. به منظور بدست آوردن ایده‌آل‌های مثبت و منفی ابتدا توابع هدف و محدودیت‌ها را از حالت فازی به قطعی تبدیل نموده و سپس مقدار بهینه هر یک از توابع هدف را بدون در نظر گرفتن سایر توابع به طور کاملاً مجزا حل می‌کنیم تا ایده‌آل‌های مثبت برای هر از توابع هدف محاسبه گردد. به همین ترتیب برای محاسبه ایده‌آل‌های منفی بدترین جواب ها را برای هر یک از توابع هدف محاسبه می‌کنیم. طبق الگوی بهینه سازی ماکس- مین(زیمرمن) بر اساس منطق فازی توابع ساخته شده برای دوری و نزدیکی به ایده‌آل‌های مثبت و منفی را در قالب یک تابع هدف بهینه می کنیم تا جواب بهینه نهایی بدست آید. برای روشن شدن روش ارائه شده یک مثال در پایان آورده شده است. همچنین نتایج بررسی در مثال ارائه شده نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان‌کلیدی: تاپسیس، تصمیم‌گیری چندمعیاره، تصمیم‌گیری چندهدفه، ابعاد بزرگ، برنامه‌ریزی غیرخطی، ساختار بلوکی زاویه دار

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین.
meghdadsalimi@gmail.com

۲- استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین (عهده دار مکاتبات)
afsharnb@alum.sharif.edu

۳- استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین.
b.vahdani@gmail.com

مقدمه

به طور طبیعی هر فرد یا سازمان همواره به دنبال رسیدن به هدف تعیین شده خود می‌باشد. با بهینه نمودن مدل ریاضی برگرفته شده از اهداف و محدودیت‌های مساله به هدف مورد نظر نزدیک می گردیم. در بسیاری از موارد، همزمان بهینه نمودن چندین هدف مدّ نظر می‌باشدکه در اکثر مواقع این اهداف نسبت به هم در یک راستا نمی‌باشند؛ بدین معنا که بهینه شدن یکی از اهداف، موجب بدتر شدن اهداف دیگر می‌شود. با توجه به این واقعیت به دنبال یافتن پاسخی می‌باشیم که نقطه‌ای ایده‌آل همزمان برای همه اهداف باشد. هم چنین فرآیند بهینه‌سازی می‌تواند با چندین محدودیت نظیر محدودیت منابع، زمان، بودجه و غیره همراه باشد. علاوه بر این در بسیاری از مسائل برنامه‌ریزی، روابط بین متغیرها خطی نیست. بنابرین توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت غیر خطی مطرح می گردند. بسیاری از روش‌هایی که برای حل مسائل چند هدفه غیرخطی مطرح می گردند تنها قادر به یافتن یک جواب بهینه محلی می‌باشند. به عبارت دیگر جواب حاصل از حل این روش ها لزوماً همان جواب بهینه سراسری نمی‌باشد. بنابراین در بسیاری از شاخه‌های علم، وجود روشی که بتوان با حل مدل به کمک آن به جواب بهینه سراسری نزدیک شد، بسیار ارزشمند به نظر می‌رسد.

علاوه بر این در بسیاری از موارد، شمار فاکتورهایی که مساله بر اساس آنها مدل‌سازی شده است، از مقیاس بزرگی می‌باشد. بنابراین با یک مساله مقیاس بزرگ[1] برنامه‌ریزی مواجه‌ایم. در این گروه از مسائل بدست آوردن جواب موثر در زمان کوتاه و از روش‌های ساده و معمولی امکان پذیر نمی‌باشد. پیچیدگی روش حل به سرعت افزایش می‌یابد. همچنین یافتن میزان وابستگی فاکتورهای موثر در مدل به راحتی قابل محاسبه نمی‌باشد. اما خوشبختانه تعداد بسیار زیادی از این مسائل دارای ساختارهایی می‌باشند که فرایند حل اینگونه مسائل را تسهیل می‌کنند. یکی از این گروه‌ها خانواده مسائل برنامه‌ریزی مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه‌دار[2] می‌باشد. مسائل با ساختار بلوکی زاویه‌دار بیانگر وضعیت شرکت‌های بزرگی است

[1]. Large-Scale Problem
[2]. Block Angular Structure

که تعدادی شرکت‌های فرعی تحت پوشش با بخش‌های مختلف و نسبتاً مستقل از هم دارند.(Abo-Sinna & Amer, 2005) از آنجا که هر یک از بخش‌های شرکت صرفاً به دنبال بهینه کردن عملیات مربوط به خود است، لذا مساله تقریباً به چند مساله فرعی تجزیه می‌گردد. در این فرآیند تجزیه، محدودیت های مستقل هریک از شرکت‌های زیر مجموعه شرکت اصلی را یک بلوک می‌نامند. علاوه بر محدودیت‌های مستقل، تعدادی محدودیت مشترک نیز می‌تواند وجود داشته باشد. برای حل این مسائل از الگوی تجزیه دانتزیگ-وولف[1] استفاده می‌گردد. الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف غالباً توانایی حل مسائل بزرگ را داراست و هنگامی که ماتریس ضرایب در محدودیت‌ها دارای ساختار خاص زاویه‌ای باشد این کارایی افزایش می‌یابد. الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مساله مدل‌سازی شده به مساله‌ای جدید که تنها شامل محدودیت‌هایی است که این محدودیت‌ها تقریباً شامل تمامی متغیرها می‌باشد. لذا با کاهش تعداد محدودیت‌ها، مساله با تعداد تکرارهای کمتری نسبت به مساله اولیه حل خواهد شد.(Hu et al., 2009)

استفاده از روش‌های سازشی[2] تصمیم‌گیری، یکی از کاراترین روش‌ها برای حل این نوع مسائل می‌باشد. در روش‌های سازشی که بیشتر به روش‌های VIKOR و TOPSISنسبت داده می شود، میزان ارزشمندی جواب‌ها به میزان نزدیکی آنها به جواب ایده‌آل مثبت و میزان دوری آنها از جواب ایده‌آل منفی یا میزان دوری نسبت به میزان تاسف بستگی دارد. روش‌های سازشی به عنوان روش‌هایی برای رتبه‌بندی الترناتیو ها در مسائل MADM مطرح می باشند ولی در این پژوهش می‌خواهیم با استفاده از همین مفهوم در نزیکی به جواب ایده‌آل از روش‌های تصمیم‌گیری سازشی در نزدیک شدن به جواب بهینه در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه MODM بهره گیریم. می‌توانیم همزمان با استفاده از منطق روش تجزیه دانتزیگ-وولف و روش تصمیم‌گیری سازشی به طور همزمان، یک روش برای حل مسائل مقیاس بزرگ ارائه نماییم. علاوه براین شمار زیادی از پروژه های تحقیقاتی برای مدل سازی از داده‌هایی استفاده

[1] . Dantzig & Wolfe
[2] . Compromise Methods

می‌کنند که به صورت مقادیر قطعی مطرح می شوند. در حالی که در برخورد با بسیاری از مسائل دنیای واقعی نمی‌توان داده‌ها را به صورت دقیق مطرح نمود. به عبارت دیگر غیر قطعی بودن داده‌ها یکی از ویژگی‌های اساسی در محیط بهینه سازی می‌باشد. یکی از کاراترین ابزار برای تبیین مفهوم عدم قطعیت، منطق فازی می‌باشد. به علاوه اینکه در بسیاری از موارد، مسائل برنامه ریزی به صورت غیر خطی مطرح می‌گردد. غیر خطی بودن مسائل برنامه‌ریزی ممکن است به غیرمحدب بودن فضای شدنی مساله برنامه‌ریزی بیانجامد که در چنین حالاتی از روش‌های تقریبی برای حل این مسائل بهره می‌گیریم. اینکه آیا می توان از یک روش تصمیم گیری سازشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه غیر خطی مقیاس بزرگ در محیط‌های فازی با دارا بودن ساختار بلوکی زاویه‌داراستفاده نمود، سوالی است که این پژوهش به آن پاسخ می‌دهد.

مرور ادبیات

در این قسمت به بررسی ادبیات و کارهای انجام شده در زمینه مطالب مرتبط با این مقاله تا به اکنون می‌پردازیم. مدل‌های تصمیم‌گیری می‌توانند در انتخاب مسیر صحیح، جهت نزدیک شدن به جواب بهینه بسیار موثر باشند. یکی از انواع مدل‌های تصمیم‌گیری مدل‌های سازشی می‌باشند که بر اساس تئوری مطلوبیت برنامه ریزی شده‌اند. در بسیاری از مسائل مدیریت و مهندسی صنایع، همزمان بهینه نمودن چندین هدف با در نظر گرفتن محدودیت‌های چندگانه مد نظر می‌باشد. در حل مدل‌های برنامه ریزی چندهدفه به دنبال پاسخی می گردیم که همزمان برای همه اهداف ایده‌آل باشد. (Hwang &Yoon, 1981) پیش فرض اصلی در تئوری مطلوبیت این است که تصمیم‌گیرنده آلترناتیوی را انتخاب می کند که حداکثر مطلوبیت را برایش داشته باشد. برای این منظور روش برنامه‌ریزی سازشی مطرح گردید. مبنای این روش، حداقل نمودن بردار ارزیابی آلترناتیوها از نقطه ایده‌آل مثبت است. (یعنی انتخابی که برای تصمیم گیرنده بیشترین مطلوبیت را داشته باشد) مزیت اصلی این روش سادگی ساختار

مفهومی آن است (Abo-Sinna & Amer, 2005). روش تصمیم‌گیری سازشی با توجه به مفهوم آن بیشتربه روش های TOPSIS و VIKOR اطلاق می‌گردد.

روش تاپسیس اولین‌بار توسط هوانگ و یون[1] در سال ۱۹۸۱ مطرح گردید که به عنوان یک روش تصمیم‌گیری سازشی بر مبنای حداقل نمودن بردار ارزیابی آلترناتیوها از نقطه ایده‌آل مثبت و حداکثر نمودن آن از نقطه ایده‌آل منفی به کار می‌رفت.(Hwang et al., 1981)

یکی دیگر از مفاهیم به کار رفته در این مقاله مفهوم برنامه‌ریزی غیر خطی می‌باشد. در بسیاری از مسائل، مدل‌سازی توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت غیرخطی مطرح می‌گردد. در سال ۱۹۶۲ کارپنر اولین کسی بود که فرمول برنامه‌ریزی غیرخطی را برای مساله پخش بار اقتصادی معرفی کرد(carpentier, 1962). محدب بودن مساله برنامه‌ریزی غیر خطی همان شرط کافی بودن شرایط کان تاکر می باشد(Winston &wayne, 1994).

در برخورد با خیلی از مسائل دنیای واقعی، تعداد فاکتورهای موثر در تصمیم‌گیری، بسیار زیاد می‌باشد. به عبارت دیگر در چنین مواردی با مسائل مقیاس بزرگ روبرو می‌باشیم. میزان پیچیدگی در چنین مسائلی به خصوص در حالت غیرخطی بسیار زیاد می‌باشد. اما خوشبختانه دسته بسیار بزرگی از این مسائل دارای ساختارهای ویژه ای می‌باشند که می‌توان از روش‌های حل خاص برای آنها استفاده نمود. یکی از اعضای این خانواده دسته خاصی است که به ساختار بلوکی زاویه‌دار مشهورند(Abo-Sinna & Amer, 2005; Heydari et al., 2010; Dantzig &Wolfe., 1961; Sakawa, 2000)

دانتزیگ و وولف در سال ۱۹۶۱ یک روش تجزیه را برای حل مسائل با ساختار بلوکی زاویه‌دار ارائه نمودند (Kovaleva, 2010)

این روش تجزیه سپس برای حل مسائل مقیاس بزرگ خطی و غیر خطی مورد استفاده قرار گرفت. اساس کار در این روش این است که از روش‌های اصلاح شده تحقیق در عملیات مانند روش تولید ستون، روش سیمپلکس اصلاح شده و روش کاهش محدودیت‌ها بهره می‌گیرد(Sakawa et al., 1995; Heydari et al., 2010). همچنین این روش

1. Hwang and yoon

تجزیه در حل مسائل برنامه ریزی خطی در محیط فازی مورد استفاده قرار گرفت (El-Sawy., 2000). الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف غالبا توانایی حل مسائل بزرگ را داراست و هنگامی که که ماتریس ضرایب در محدودیت ها دارای ساختار خاص زاویه‌ای باشد این کارایی افزایش می‌یابد(Guillaume, 2010; Gioan &Paul, 2012). الگوریتم تجزیه دانتزیگ- وولف از تغییر متغیرهای تصمیم و تبدیل مساله مدل‌سازی شده به مساله‌ای جدید که تنها شامل محدودیت‌هایی است که این محدودیت‌ها تقریباً شامل تمامی متغیرها می‌باشد. لذا با کاهش تعداد محدودیت‌ها، مساله با تعداد تکرارهای کمتری نسبت به مساله اولیه حل خواهد شد(Kovaleva, 2010; Elisangela et al., 2013; Laureano et al., 2013).

با توجه به مرور مطالب بررسی شده معلوم می گردد که شمار زیادی از پژوهش های انجام گرفته در حالتی مطرح گردیده اند که داده‌های مساله به صورت کاملاً قطعی در نظر گرفته شده اند. در حالی که غیر قطعی بودن، یکی از ویژگی های اساسی داده‌ها در برخورد با مسائل دنیای واقعی می‌باشد. در بسیاری از شاخه‌های علم، کاربرد جنبه‌های غیر قطعی بسیار چشمگیر می‌باشد.(Vahdani et al., 2010; Jolai et al., 2011)

منطق فازی یکی از بهترین ابزارها برای تبیین مفهوم عدم قطعیت می‌باشد. مفهوم مجموعه‌های فازی که توسط پرفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید، با موضوع مباحث تصمیم گیری ترکیب شد و درنتیجه الگوریتم‌های تصمیم گیری فازی مطرح گردیدند.(Zadeh, 1965; Vahdani et al., 2010)

همچنین روش‌های سازشی تصمیم گیری در محیط‌های فازی نیز مطرح شدند. (Bellman & Zadeh, 1970; Mahdavi et al., 2008). دهه ۱۹۶۰ را می‌توان دهه آغازین تئوری فازی نامید. منطق فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط دکتر لطفی‌زاده، دانشمند ایرانی‌تبار و استاد علوم کامپیوتری دانشگاه برکلی کالیفرنیا، ابداع شد. ولی نخستین‌بار در پی تنظیم نظریه مجموعه‌های فازی به وسیله پروفسور لطفی زاده در سال ۱۹۶۵ درصحنه محاسبات نو ظاهرشد(Zadeh, 1965; Vahdani et al., 2010) ضرایب مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه نیز می‌تواند فازی باشد. در این صورت با همان تکنیک

دیفازی کردن هر یک از مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه را می‌توان قطعی نمود و سپس با روش‌های حل برنامه‌ریزی چند هدفه می‌توان آن را حل نمود(Stanciulescu., 2003). با وجود روش‌های مختلف در حل مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه فازی، به نظر می‌رسد که چنانچه با اعداد فازی مثلثی مواجه باشیم در این صورت به علت سادگی از روش قطعی‌سازی که ترابی و همکارانش در مورد مسائل خطی و غیر خطی به کار برده اند، استفاده می‌گردد(Torabi &Hassini, 2008; Vahdani et al., 2013) .

در سال‌های اخیر برخی روش‌های سازشی تصمیم‌گیری با شاخص‌های چندگانه برای حل مسائل مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه‌دار به کار رفته اند.
(Abo-Sinna & Amer, 2005; Abo-Sinna & Abou-El-Enie, 2006).

ازجمله این روش‌ها، روش تاپسیس می‌باشد. روش TOPSISبه منظور حل مسائل مقیاس بزرگ چند هدفه غیرخطی با داده‌های قطعی با ساختار بلوکی زاویه دار به کار گرفته شد. سپس به منظور استفاده از روش‌های تصمیم‌گیری در مسائل چند هدفه، ابوسینا و ابوالعنین از این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی مقیاس بزرگ چند هدفه بهره گرفتند(Shidpour et al., 2013; Ibrahim, 2014, Abo-Sinna et al., 2008). همچنین روش تاپسیس برای مسائل برنامه‌ریزی چند سطحی نیز مورد استفاده قرار گرفت(Shidpour et al., 2013; Ibrahim, 2014) .

در پژوهش حاضر نیز به ارائه روشی می‌پردازیم که بتواند با بهره‌گیری از تکنیک های تصمیم‌گیری سازشی روش حلی را به منظور یافتن مسیری منطقی در جهت یافتن بهترین جواب برای مسائل مقیاس بزرگ چند معیاره فازی با ساختار بلوکی زاویه دار ارائه نماید.

تعاریف و مفاهیم

تاپسیس

مراحل کلی این روش به شرح ذیل می‌باشد (اصغرپور، ۱۳۸۹):

گام۱: ساخت ماتریس تصمیم

در این مرحله ماتریس تصمیم گیری با توجه به آلترناتیوها و شاخص‌ها و استفاده از نظر خبر تشکیل می شود. همچنین وزن شاخص‌ها نیز می‌توانند متفاوت از هم باشند. در ماتریس تصمیم به عنوان وزن شاخص j–ام در نظر گرفته شده است.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} c_1 & \cdots & c_j & \cdots & c_n \end{array} \\
D = \begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & & & \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$W = (w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_n)$$

گام ۲ : تبدیل ماتریس تصمیم‌گیری موجود به یک ماتریس «بی مقیاس شده».

$$r_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2}} \text{، } \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad i= 1, 2\ldots m \qquad (۱)$$

گام۳ : مشخص نمودن مقادیر ایده آل مثبت و ایده آل منفی.

$$
\begin{aligned}
A^+ &= [v_1^+, \ldots, v_j^+, \ldots, v_n^+]; \qquad v_j^+ = \max_i \{v_{ij}\} \\
A^- &= [v_1^-, \ldots, v_j^-, \ldots, v_n^-]; \qquad v_j^- = \max_i \{v_{ij}\}
\end{aligned} \qquad (۲)
$$

گام۴ : محاسبه اندازه فاصله از ایده آل مثبت و منفی برای بدست آوردن فاصله هر گزینه از ایده‌آل‌های مثبت و منفی، دو روش وجود دارد: روش اقلیدسی و ورش بلوکی. در اینجا رابطه مربوط به روش اقلیدسی بیان می‌گردد:

(۳) فاصله گزینه iام از ایده آل مثبت

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_{s_j^+})^2}$$

(۴) فاصله گزینه iام از ایده آل منفی

$$D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(v_{ij} - v_{s_j^-})^2}$$

گام ۵ : محاسبه نزدیکی نسبی گزینه‌ها به راه حل ایده آل.

این شاخص را جهت ترکیب کردن مقادیر D_i^- و D_i^+ و در نتیجه مقایسه گزینه‌ها نسبت به هم تعریف می‌کنیم، که با رابطه زیر قابل محاسبه است:

(۵)

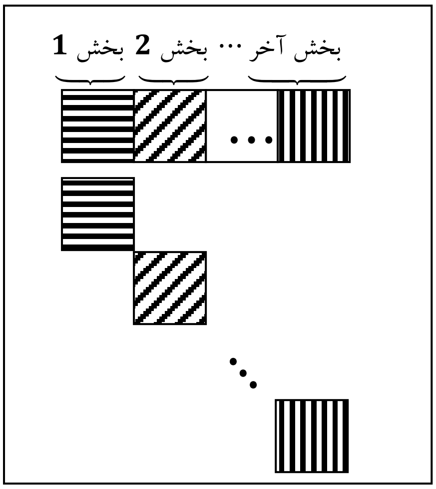
$$C_i^+ = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}$$

گام ۶- رتبه بندی گزینه ها بر اساس نزدیکی آنها به ایده آل های مثبت و منفی.

مسائل چند بخشی

یکی از متداول‌ترین انواع مسائل مقیاس بزرگ در برنامه‌ریزی، مسائل چند بخشی می‌باشد که موضوع مورد مطالعه در این پژوهش نیز از همین‌گونه مسائل می‌باشد. مسائل چند بخشی بیانگر شرکت‌های بزرگی هستند که تعدادی شرکت‌های فرعی تحت پوشش با بخش‌های مختلف و نسبتاً مستقل از هم دارند. از آنجا که هر یک از بخش‌های شرکت صرفاً به دنبال بهینه نمودن عملیات مربوط به خود است، بنابراین مساله تقریباً به چند مساله فرعی تجزیه می‌شود. اما شرکت مادر به منظور ایجاد هماهنگی، کنترل و اعمال سیاست‌های کلی خود بر

شرکت‌ها یا بخش‌های تابعه، منابع و امکانات مشترکی را بین آنها تقسیم می‌کند که این منابع و امکانات در قالب مجموعه محدودیت‌های مشترک در طول برنامه‌ریزی ظاهر می‌شود. در شکل (۱) محدودیت‌های مشترک به شکل مستطیل نشان داده شده است که همه بخش‌های مجزای دیگر را به یکدیگر پیوند می‌دهد. ضرایب هر یک از شرکت‌های تابعه نیز به شکل مربع نشان داده شده است که به هر یک از آنها یک بلوک گفته می‌شود. به مسائل چند بخشی، مسائل با ساختار بلوکی زاویه‌دار نیز گفته می‌شود(مهرگان، ۱۳۹۱).



شکل ۱- نمایش مساله برنامه ریزی چند بخشی با ساختار بلوکی زاویه دار

شکل کلی مسائل چند بخشی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\text{Max (Min)}Z = C_1X^1 + C_2X^2 + \cdots + C_qX^q \qquad (۶)$$

$$\begin{array}{lllllll}
b_0 = & A_1X^1 & + A_2X^2 & + \cdots & + A_qX^q & & \\
& D_1X^1 & & & & = & b_1 \\
& & D_2X^2 & & & = & b_2 \\
& & & \cdots & & & . \\
& & & \cdots & & & . \\
& & & \cdots & & & . \\
& & & & D_qX^q & = & b_q
\end{array}$$

پارامتر های مدل به صورت زیر مورد بررسی قرار می گیرند:

C_i : یک بردار ستونی n- بعدی به عنوان ضرایب متغیر i- ام

A_i : بردار ستونی به عنوان ضریب محدودیت عمومی برای متغیر i- ام

D_i : بردار ستونی به عنوان ضریب محدودیت برای زیر مساله i- ام

b_0 : مقدار سمت راست برای محدودیت عمومی

b_i : مقدار سمت راست برای محدودیت زیر مساله i- ام

که در آن مجموعه محدب $S = \{X_j \big| D_j X_j = b_j, X_j \geq 0\}$ نشان‌دهنده محدودیت‌های بخش‌های مختلف برای هر یک از مسائل برنامه ریزی می باشد.

مساله مورد برررسی

مدلی که در این تحقیق مدنظر است، مدلی است که بر پایه مسائل چند هدفه مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه دار تحت شرایط عدم قطعیت با ضرایبی که دارای ساختار فازی می‌باشند طراحی گردیده است. این ساختار به صورت فازی مثلثی در نظر گرفته شده است. هریک از توابع هدف یا محدودیت‌ها خود می‌توانند از چندین تابع تشکیل یافته باشند. ضمناً توابع هدف یا محدودیت‌ها می‌توانند به صورت غیر خطی و یا حتی غیر محدب در نظر گرفته شوند. عدم تحدب در مسائل چند متغیره مورد بررسی، به کمک ماتریس هسین مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مدل مورد بررسی، تعداد زیر مساله‌ها در یک مساله مقیاس بزرگ، q زیر مساله در نظر گرفته شده است. هر یک از توابع هدف می‌تواند شامل چندین تابع باشد. ویژگی مشترک تمامی توابع هدف در تفکیک پذیر بودن آنها می‌باشد. مدل پیشنهادی تصمیم‌گیری سازشی برای مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه غیرخطی غیر محدب با مقیاس بزرگ و ساختار بلوکی زاویه‌دار تحت شرایط عدم قطعیت به همراه پارامترها و متغیرهای تصمیم‌گیری به این صورت ارائه می‌گردد:

P:
$\text{Max (Min)} f_1(X, \widetilde{U}_1) = \sum_{j=1}^{N} f_{1j}\,(X_j, \widetilde{U}_{1j})$
$\text{Max (Min)} f_2(X, \widetilde{U}_2) = \sum_{j=1}^{N} f_{2j}\,(X_j, \widetilde{U}_{2j})$
. (۷)
.
.
$\text{Max (Min)} f_L(X, \widetilde{U}_L) = \sum_{j=1}^{N} f_{Lj}\,(X_j, \widetilde{U}_{Lj})$

$$S.t.\quad FS = \begin{cases} \tilde{g}_m(x1) \le \tilde{B}_1 & m = 1,2,\dots,s_1 \\ \tilde{g}_m(x2) \le \tilde{B}_2 & m = s_1+1,\dots,s_2 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{g}_m(xN) \le \tilde{B}_N & m = s_r+1,\dots,s_M \\ \widetilde{H}_i(X) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{h}_{ij}(X_{j)} \le \tilde{B} & \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{w} \end{cases}$$

$$f_i(X, \widetilde{U}_\iota) = \widetilde{U}_\iota C_i X = \sum_{j=1}^{N} f_{ij}\,(X_j, \widetilde{U}_\iota) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{p} \widetilde{U}_{ijk} C_{ijk} V_{ijk}(X_j) \qquad (۸)$$

که در آن $V_{ijk}(X_j)$ ، k- امین تابع مربوط به j – امین متغیر در i– امین تابع هدف می‌باشد. که می‌تواند به صورت یک تابع غیر خطی مطرح باشد. همچنین $g_{\widetilde{n}}(xj) = U_{\widetilde{ij}} C_{ij} V_{ij}$ به عنوان n– امین محدودیت مربوط به j – امین متغیر می باشد. به همین ترتیب $\widetilde{H_\iota}(X)$ به عنوان یک محدودیت عمومی که می تواند همزمان تمامی متغیر ها را شامل شود در فضای n متغیره R^n ، می‌باشد.

پارامترهای مدل ارائه شده بصورت زیر می‌باشند:

L تعداد توابع هدف در مساله چند هدفه

q تعداد زیر مساله ها

N تعداد متغیرها

N_i مجموعه متغیرهای زیر مساله i- ام و $i= 1,2,. . . ,q$

p_i زیر مساله i- ام

P_{itj} تعداد توابع برای رابطه i- ام مربوط به متغیر i- ام برای زیر مساله i- ام.

R مجموعه اعداد حقیقی

C_i یک ماتریس قطری $(N \times N)$ برای تابع i- ام

C_{ijk} یک ماتریس قطری $(N \times N)$ به عنوان ضریب برای تابع k- ام مربوط به متغیر j- ام در تابع i- ام.

C_{ij} یک ماتریس قطری $(N \times N)$ به عنوان ضریب برای محدودیت i- ام مربوط به متغیر j- ام

d_{ij} یک ماتریس قطری $(N \times N)$ به عنوان ضریب برای محدودیت عمومی i- ام مربوط به متغیر j- ام

$\tilde{U}_i$ یک بردار سطری n –بعدی به عنوان ضریب برای تابع هدف i- ام

$\tilde{U}_{ij}$ یک بردار سطری n –بعدی از پارامترهای فازی به عنوان ضریب برای تابع هدف i- ام مربوط به متغیر j- ام

$\tilde{U}_{ijk}$ یک بردار سطری n –بعدی از پارامترهای فازی برای تابع k- ام مربوط به متغیر j- ام در تابع i- ام.

W تعداد محدودیت‌های عمومی (محدودیت‌هایی که می‌تواند شامل تمامی متغیرها باشد) در فضای R^N

M تعداد محدودیت ها

S_i تعداد محدودیت ها برای متغیر i- ام

$\tilde{B}$ بردار S_i- بعدی سمت راست برای محدودیت عمومی

$\tilde{B}_j$ بردار S_i- بعدی سمت راست برای محدودیت عمومی برای زیر مساله i- ام و $i = 1,2,. . . ,q$

که در آن $X = (x_1, x_2, .., x_N)$ یک بردار تصمیم گیری N- بعدی می‌باشد. همچنین $f_i(X, \widetilde{U}_i)$, i=1,2,…, L تابع هدف i- ام می باشد. در این مدل فرض شده است که توابع هدف به فرم تفکیک پذیر می باشند. خاطر نشان می‌گردد که تمام یا تعدادی از توابع هدف یا توابع در محدودیت ها می توانند به صورت غیر خطی و حتی غیر محدب مطرح گردند. یک مساله مقیاس بزرگ غیرخطی با ساختار بلوکی زاویه دار با ضرایب فازی می‌تواند طبق الگوریتم دانتزیگ- وولف به زیر مساله تجزیه شده و سپس در مقیاس کوچکتر حل گردد. زیر مساله می تواند به صورت زیر نوشته گردد:

$$P_i \begin{cases} \text{Max (Min)} f_1(X, \widetilde{U}_1) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{i1j}} f_{1k}(X_j, \widetilde{U}_{1k}) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{i1j}} \widetilde{U}_{1k} C_{1k} V_{1k}(X_j) \\ \text{Max (Min)} f_2(X, \widetilde{U}_2) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{i2j}} f_{2k}(X_j, \widetilde{U}_{2k}) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{i2j}} \widetilde{U}_{2k} C_{2k} V_{2k}(X_j) \\ . \\ . \\ . \\ \text{Max (Min)} f_L(X, \widetilde{U}_L) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{iLj}} f_{Lk}(X_j, \widetilde{U}_{Lk}) = \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^{P_{iLj}} \widetilde{U}_{Lk} C_{Lk} V_{Lk}(X_j) \\ S.t. \qquad FS_i = \begin{cases} \sum_{j \in N_i} \tilde{g}_j(X_j) \le \tilde{B}_j \\ \tilde{H}_i(X) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{h}_{ij}(X_j) \le \tilde{B} \qquad i = 1, 2, \dots, w \end{cases} \end{cases} \tag{۹}$$

همان طور که در مساله شماره (۹) دیده می‌شود، زیر مساله i- ام شامل L تابع هدف می‌شود. همچنین در رابطه $\tilde{h}_{ij}(X_j) = \widetilde{U}_{ij} d_{ij} h_{ij}$، تابع h_{ij} به عنوان تابعی برای متغیر j- ام در محدودیت i- ام می‌باشد. همچنین تمامی ضرایب در توابع هدف و محدودیت ها به صورت فازی مثلثی فرض شده است.

روش حل به کمک تاپسیس برای حل مسائل چند هدفه مقیاس بزرگ غیر خطی با ضرایب فازی

در این بخش روش تجزیه دانتزیگ-وولف به منظور مساله مقیاس بزرگ اولیه به کار رفته و آن را به چند زیر مساله غیر خطی با ابعاد کوچکتر تبدیل نموده است. به عبارت دیگر با به کار بردن روش تجزیه دانتزیگ-وولف از فضای N- بعدی به فضای بسیار کوچکتر کاهش یافته‌ایم و در نهایت در این روش حل، با به کار بردن روش تاپسیس، یک مساله L- هدفه به یک مساله دو هدفه تبدیل شده است. برای به دست آوردن یک جواب سازشی از مساله اصلی، ابتدا یک جواب ایده آل مثبت (PIS) و ایده آل منفی (NIS) برای هریک از اهداف بطور جداگانه (بدون در نظر گرفتن سایر اهداف) در نظر می‌گیریم، سپس با به کار بردن ایده‌آل‌های مثبت و منفی یک مساله با دو تابع هدف و در نهایت مساله نهایی تک هدفه برای هر یک از زیر مساله‌ها ساخته می‌شود که با حل این مساله جواب نهایی برای هر یک از زیر مساله‌ها بدست می‌آید. مدل ارائه شده برای بدست آوردن جواب دارای گام های زیر می‌باشد:

گام ۱- مساله اصلی را با استفاده از منطق تجزیه دانتزیگ – وولف به q زیر مساله تجزیه نمایید. زیر مساله i- ام می تواند به صورت زیر ارائه گردد:

$$P_i\left\{\begin{array}{l} \text{Max (Min)} f_1(X,\widetilde{U}_1) = (a_{i1},b_{i1},c_{i1})C_{i1}X_i \\ \text{Max (Min)} f_2(X,\widetilde{U}_2) = (a_{i2},b_{i2},c_{i2})C_{i2}X_i \\ \quad\vdots \\ \text{Max (Min)} f_L(X,\widetilde{U}_L) = (a_{iL},b_{iL},c_{iL})C_{iL}X_i \\ S.t.\;\; FS_i = \left\{\begin{array}{ll} (v_{im1},v_{im2},v_{im3})d_{im}X_i \le (b_{im1},b_{im2},b_{im3}) & m = s_{i-1}+1,\dots,s_i \\ \widetilde{H}_i(X) = \sum_{j=1}^{N}(o_{ij1},o_{ij2},o_{ij3})e_{ij}X_i \le (r_i,s_i,t_i) & i = 1,2,\dots,w \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (۱۰)$$

$$\text{s.t.}\quad (X_1, X_2, \dots, X_N) \in FS.$$

روش تجزیه دانتزیگ- وولف برای مسائل برنامه‌ریزی خطی به صورت گام به گام مطرح می‌گردد. ولی برای یک مساله برنامه‌ریزی غیر خطی در روش ارائه شده، هدف یافتن فضای مشترک بین تمامی زیر مساله‌ها یا همان بلوک‌ها می‌باشد. همان طور که در مساله تجزیه شده در رابطه (۱۰) مشخص گردیده است، برای زیر مساله i- ام، برخی محدودیت‌های مختص همین زیر مساله آورده شده است و علاوه بر این محدودیت‌های عمومی که مشترک برای تمامی زیر مساله‌ها است نیز در مدل آورده شده است.

گام ۲- با یک روش ساده هر مساله فازی را به سه مساله غیر فازی تبدیل نمایید. این روش برای دیفازی نمودن برخی مسائل فازی مطرح گردیده است (Zimmermann, 1978; Hu et al., 2009; Liu et al., 2013).

به دلیل اینکه تمامی ضرایب در توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی در نظر گرفته شده‌اند، بنابراین هر یک از توابع هدف فازی به سه تابع هدف قطعی تبدیل گردیده‌اند. همچنین هر یک از محدودیت‌های فازی به سه محدودیت قطعی تبدیل گردیده‌اند.

زیر مساله i- ام فازی به صورت زیر به سه مساله قطعی تبدیل می‌شود:

P_i :

$$P_{i1} : \begin{cases} \text{Min(Max) } (b_{i1}-a_{i1})C_{i1}X_i \\ \text{Max (Min) } (b_{i1})C_{i1}X_i \\ \text{Max (Min) } (c_{i1}-b_{i1})C_{i1}X_i \end{cases} \tag{۱۱}$$

$$Pi_2 : \begin{cases} \text{Min(Max) } (b_{i2}-a_{i2})C_{i2}X_i \\ \text{Max (Min) } (b_{i2})C_{i2}X_i \\ \text{Max (Min) } (c_{i2}-b_{i2})C_{i2}X_i \end{cases} \tag{۱۲}$$

.
.
.

$$P_{iL}: \begin{cases} \text{Min(Max) } (b_{iL}-a_{iL})C_{iL}X_i \\ \text{Max (Min) } (b_{iL})C_{iL}X_i \\ \text{Max (Min) } (c_{iL}-b_{iL})C_{iL}X_i \end{cases} \tag{۱۳}$$

$$S.t. \begin{cases} \begin{cases} v_{im1}d_{im}(xi) \le b_{im1} \\ v_{im2}d_{im}(xi) \le b_{im2} \\ v_{im3}d_{im}(xi) \le b_{im3} \end{cases} & m = s_{i-1}+1,\dots,s_i \\ \\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} o_{ij1}e_{ij}X_j \le r_i \\ \sum_{j=1}^{N} o_{ij2}e_{ij}X_j \le s_i \\ \sum_{j=1}^{N} o_{ij3}e_{ij}X_j \le t_i \end{cases} & i = 1,2,\dots,w \end{cases} \tag{۱۴}$$

گام ۳- جواب‌های ایده‌آل مثبت (PIS) و ایده‌آل منفی (NIS) برای هریک از اهداف به طور جداگانه بدون در نظر گرفتن سایر اهداف محاسبه نمایید. بصورت زیر:

$$\text{PIS}: {f_{bj}}^{*} = \{\text{Max (Min)} f_{bj}(X_j)\ (f_{cj}(X_j),\ \forall b\ (\forall c)\} \tag{۱۵}$$

$$\text{NIS}: {f_{bj}}^{-} = \{\text{Min (Max)} f_{bj}(X_j)\ (f_{cj}(X_j),\ \forall b\ (\forall c)\} \tag{۱۶}$$

که در آن $f_{bj}(X_j)$ نشان دهنده تابع سود و $f_{cj}(X_j)$ نشان دهنده تابع هزینه می‌باشد. باید توجه داشته باشیم که چنانچه مساله مورد بررسی محدب نباشد می‌توانیم از یک روش عددی مانند روش آزادسازی لاگرانژ یا سایر روش‌ها بهره گیریم. منطق گام سوم در روش ارائه شده این است که بهترین جواب برای یک مساله چند هدفه زمانی رخ می‌دهد که با جواب حاصل از حل تک تک مساله‌ها به صورت جداگانه یکسان باشد. به همین دلیل نیز ابتدا هر یک از اهداف را به صورت کاملاً مجزا از سایر اهداف در نظر گرفته و جواب بهینه حاصل را بدست می‌آوریم. چنین جوابی به عنوان یک جواب ایده آل می‌باشد. با محاسبه

مقادیر بهینه هر یک از اهداف به طور جداگانه جدول جواب‌های ایده آل بدست می‌آید. همچنین هر یک از اهداف را در جهت کاملاً مخالف ایده آل نیز در می‌گیریم. بدین صورت که چنانچه تابع هدف بصورت ماکزیمم سازی مطرح گردیده باشد، برای یافتن مقدار ایده آل منفی آن را به صورت مینیمم سازی مطرح می‌کنیم و برعکس.

گام ۴- با به کار بردن ایده‌آل‌های مثبت و منفی محاسبه شده در گام سوم، یک مساله با دو تابع هدف (کمترین فاصله از ایده‌آل مثبت و بیشترین فاصله از ایده آل منفی) بسازید. به صورت زیر:

$$d_i^{PIS} = \sum_{j\in B_i} w_j \left(\frac{f_{ij}{}^{*}-f_{ij}}{f_{ij}{}^{*}-f_{ij}{}^{-}}\right) + \sum_{j\in C_i} w_j \left(\frac{f_{ij}-f_{ij}{}^{*}}{f_{ij}{}^{-}-f_{ij}{}^{*}}\right) \quad (۱۷)$$

$$d_i^{NIS} = \sum_{j\in B_i} w_j \left(\frac{f_{ij}-f_{ij}{}^{-}}{f_{ij}{}^{*}-f_{ij}{}^{-}}\right) + \sum_{j\in C_i} w_j \left(\frac{f_{ij}{}^{-}-f_{ij}}{f_{ij}{}^{-}-f_{ij}{}^{*}}\right) \quad (۱۸)$$

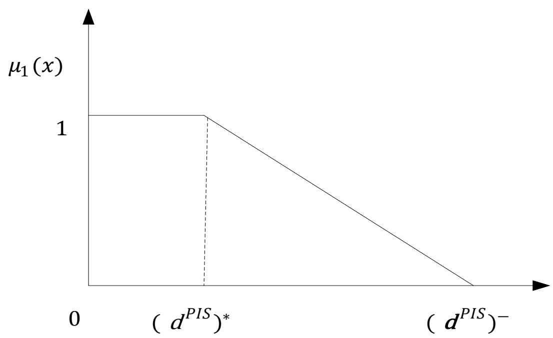
همان طور که در رابطه (۱۷) مشاهده می‌گردد، درتابع d_i^{PIS}، هدف مینیمم نمودن فاصله از ایده‌آل‌های مثبت می‌باشد. توابع هدف مورد بررسی در تابع d_i^{PIS} می‌توانند به صورت سود و یا هزینه باشند. اگر تابع هدف از جنس سود باشد و به عبارتی به صورت ماکزیمم سازی مطرح گردیده باشد، در این صورت $f_{ij}{}^{*}$ بیشترین مقدار تابع را خواهد داشت و فاصله تابع f_{ij} از آن در قسمت اول تابع d_i^{PIS} مطرح می‌گردد. همچنین چنانچه تابع هدف از جنس هزینه باشد و به عبارتی به صورت مینیمم‌سازی مطرح گردیده باشد، در این صورت $f_{ij}{}^{*}$ کمترین مقدار را دارد و فاصله تابع f_{ij}از آن در قسمت دوم تابع d_i^{PIS} مطرح می‌گردد. چنین ساختاری در تابع d_i^{NIS} نیز وجود دارد. همان طور که در رابطه (۱۸) نشان داده شده است، تابع d_i^{NIS}، هدف ماکزیمم نمودن فاصله از ایده‌آل‌های منفی می‌باشد. اگر تابع هدف به صورت ماکزیمم‌سازی مطرح گردیده باشد، $f_{ij}{}^{-}$ کمترین مقدار تابع را خواهد داشت و تابع فاصله هر یک از توابع f_{ij} از آن در قسمت اول تابع d_i^{NIS} آمده است. همچنین اگر

تابع از جنس هزینه باشد، f_{ij}^{-} بیشترین مقدار تابع را خواهد داشت و تابع فاصله هریک از توابع f_{ij} از آن در قسمت دوم تابع d_i^{NIS} آمده است.
با توجه به مفهوم جواب سازشی مساله برنامه‌ریزی دو هدفه زیر را به این منظور معرفی می‌کنیم:

$$\text{Min } d_i^{PIS}$$
$$\text{Max } d_i^{NIS} \qquad (۱۹)$$
$$X \in FS_i$$

در این قسمت طبق مدل زیمرمن، یک تابع هدف با منطق بهینه سازی ماکس–مین، به جای دو تابع هدف معرفی می‌گردد. این مدل توسط بلمن و زاده در سال ۱۹۷۰ معرفی و سپس توسط زیمرمن گسترش یافت [۳۴].
گام های این مدل به صورت زیر می‌باشد:
گام ۴-۱- توابع عضویت d^{PIS} و d^{NIS} را مطابق با شکل‌های (۲و ۳) تشکیل دهید:
تابع عضویت برای d^{PIS} به صورت زیر می‌باشد:

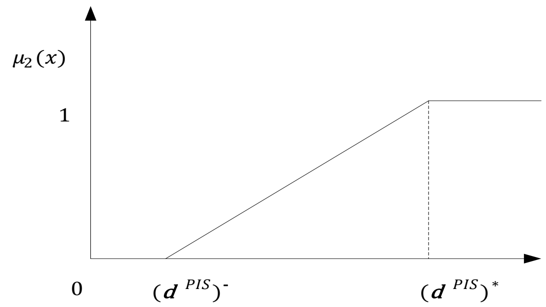
$$\mu_1(x) = \frac{(d_i^{PIS})^{-}(d_i^{PIS})}{(d_i^{PIS})^{-} - (d_i^{PIS})^{*}} \qquad (۲۰)$$



شکل ۲- تابع عضویت d_i^{PIS}

همچنین تابع عضویت برای d^{NIS} به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_2(x) = \frac{(d_i^{NIS}) - (d_i^{NIS})^-}{(d_i^{NIS})^* - (d_i^{NIS})^-} \qquad (۲۱)$$



شکل ۳- تابع عضویت $\boldsymbol{d_i^{NIS}}$

همان طور که در رابطه(۲۰) نشان داده شده است، تابع $\mu_1(x)$ همان تابع عضویت یک عدد فازی مثلثی در نیمه دوم آن می‌باشد. همچنین طبق رابطه (۲۱) $\mu_2(x)$، تابع عضویت عدد مثلثی در نیمه اول مثلث می‌باشند.

گام ۴-۲- تابع عضویت نهایی تک هدفه را برای هر یک از زیر مساله‌ها تشکیل دهید. سپس مساله تشکیل یافته را به منظور یافتن جواب نهایی حل نمایید:

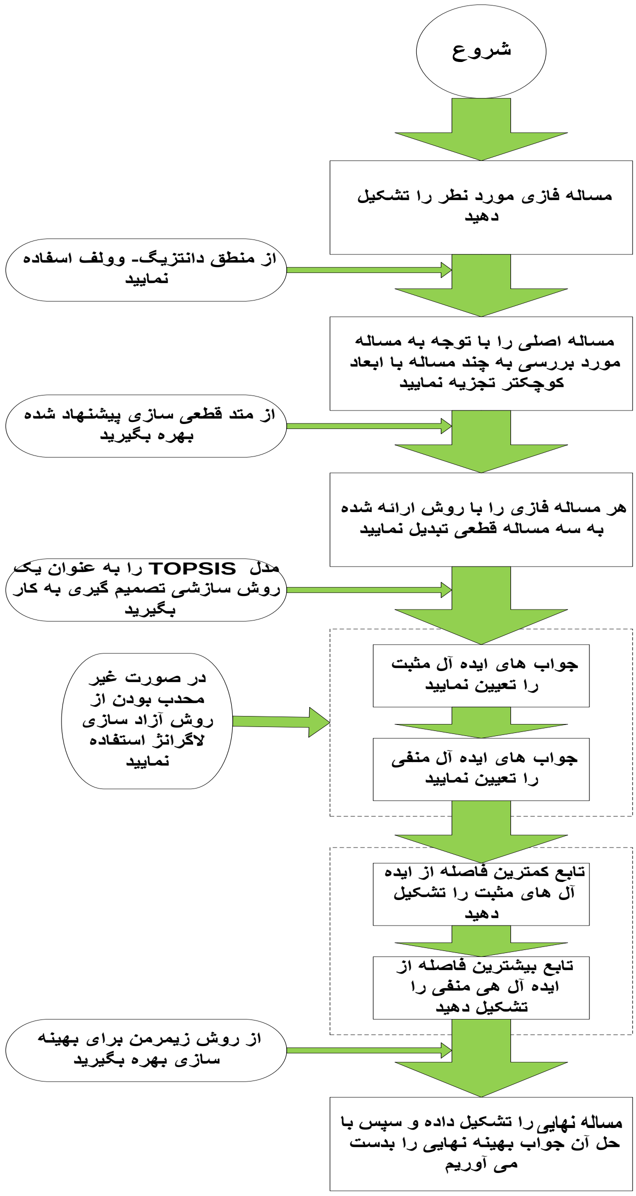
$$\max \lambda$$

$$S.t. \begin{cases} \dfrac{(d_1^{PIS}) - (d_1^{PIS})^*}{(d_1^{PIS})^- - (d_1^{PIS})^*} \geq \lambda \\ \dfrac{(d_1^{PIS})^* - (d_1^{NIS})}{(d_1^{NIS})^* - (d_1^{NIS})^-} \geq \lambda \end{cases} \qquad (۲۲)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1,\ X \in FS_1$$

می‌خواهیم توابع عضویت محاسبه شده در گام ۴-۱ را به طور همزمان ماکزیمم نماییم. برای چنین منظوری مساله برنامه‌ریزی دو هدفه فوق با روش منطق فازی به یک مساله برنامه‌ریزی یک هدفه تبدیل می‌گردد.

فلوچارت روش ارائه شده بر اساس دانتزیگ- وولف در شکل (۴) آمده است:



شکل ۴- فلوچارت روش ارائه شده برای مسائل چند هدفه فازی مقیاس بزرگ با ساختار بلوکی زاویه دار

مثال عددی

در این بخش با ارائه یک مثال گام های روش حل ارائه شده به خوبی تبیین می‌گردد. در این مثال سه تابع هدف وجود دارد که ضرایب همگی آنها و نیز ضرایب محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی مطرح گردیده است. مساله اصلی به صورت زیر مطرح گردیده است:

$$P:$$
$$\max f_1(x) = (1,2,3)(x_1-1)^2 + (2,3,4){x_2}^2 + (1,3,5)(x_3+1)^2$$
$$\max f_2(x) = (2,4,6)x_1 + (1,2,3)x_2 + (1,3,5)\,{x_3}^2 \qquad (۲۳)$$

$$\min f_2(x) = (1,2,3){x_1}^2 + (1,3,5)x_2 + (1,2,3)\,{x_3}^2$$

Subject to:

$$FS = \left\{\begin{array}{l} (1,2,3)x_1 - (1,2,3)x_2 + (2,4,6)x_3 \le (6,7,8) \\ (1,2,3){x_1}^2 + (1,3,5)x_2 + (1,2,3)x_3 \le (10,11,12) \\ (0,0,0) \le (1,2,3)x_1 \le (3,4,5) \\ (0,0,0) \le (1,2,3)x_2 \le (4,5,6) \\ \qquad\qquad (0,0,0) \le (1,2,3) \\ \qquad x_3 \le (2,3,4) \end{array}\right\}$$

با فرض اینکه مساله دارای سه بخش مجزا نسبت به یکدیگر می‌باشد، مساله اصلی به سه زیر مساله تبدیل گردیده است. بنابراین گام‌های حل مساله در مثال زیر نشان داده شده است:

گام ۱- با در نظر گرفتن مساله اصلی، آن را به سه زیرمساله تجزیه می‌کنیم. مساله اولی بر اساس متغیر x_1 بصورت زیر می‌باشد:

$$P_1: \quad \max f_1(x) = (1,2,3)(x_1-1)^2$$
$$\max f_2(x) =$$
$$(2,4,6)x_1 \qquad (۲۴)$$

$$\min f_3(x) = (1,2,3){x_1}^2$$

Subject to:

$$FS_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2,3)x_1 - (1,2,3)x_2 + (2,4,6)x_3 \leq (6,7,8) \\ (1,2,3){x_1}^2 + (1,3,5)x_2 + (1,2,3)x_3 \leq (10,11,12) \\ (0,0,0) \leq (1,2,3)x_1 \leq (3,4,5) \end{array} \right\}$$

همانند زیر مساله اول، زیر مساله دوم نیز بر حسب متغیر x_2 و زیر مساله سوم بر حسب متغیر x_3 به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} P_2:\quad & \max f_1(x) = (2,3,4){x_2}^2 \\ & \max f_2(x) = (1,2,3)x_2 \\ & \min f_3(x) = (1,3,5)x_2 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

Subject to:

$$FS_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2,3)x_1 - (1,2,3)x_2 + (2,4,6)x_3 \leq (6,7,8) \\ (1,2,3){x_1}^2 + (1,3,5)x_2 + (1,2,3)x_3 \leq (10,11,12) \\ (0,0,0) \leq (1,2,3)x_2 \leq (4,5,6) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} P_3:\quad & \max f_1(x) = (1,3,5)(x_3+1)^2 \\ & \max f_2(x) = (1,3,5){x_3}^2 \\ & \min f_3(x) = (1,2,3){x_3}^2 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

Subject to:

$$FS_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2,3)x_1 - (1,2,3)x_2 + (2,4,6)x_3 \leq (6,7,8) \\ (1,2,3){x_1}^2 + (1,3,5)x_2 + (1,2,3)x_3 \leq (10,11,12) \\ (0,0,0) \leq (1,2,3)x_3 \leq (2,3,4) \end{array} \right\}$$

گام ۲- از آنجایی که همه ضرایب در توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مثلثی مطرح گردیده‌اند، بنابراین هریک از زیر مسائل فازی به سه مساله قطعی تبدیل می‌گردد. با استفاده از روابط (۵ و۶ و۷) هر یک از مسائل فازی را به مسائل قطعی تبدیل نمایید. به این صورت:

P_1:

P_{11}: $\min f_1(x) = (x_1 - 1)^2$
$\max f_2(x) = 2x_1$
$\max f_3(x) = {x_1}^2$
Subject to:
$X \in FS_1$ (۲۷)

P_{12}: $\min f_1(x) = 2(x_1 - 1)^2$
$\max f_2(x) = 4x_1$
$\max f_3(x) = 2{x_1}^2$
Subject to:
$X \in FS_1$ (۲۸)

P_{13}: $\max f_1(x) = (x_1 - 1)^2$
$\min f_2(x) = 2x_1$
$\min f_3(x) = {x_1}^2$
Subject to:
$X \in FS_1$ (۲۹)

P_2:

P_{21}: $\min f_1(x) = {x_2}^2$
$\max f_2(x) = x_2$
$\max f_3(x) = 2\,x_2$
Subject to:
$X \in FS_2$ (۳۰)

P_{22}: $\min f_1(x) = 3{x_2}^2$
$\max f_2(x) = 2x_2$
$\max f_3(x) = 3\,x_2$
Subject to:
$X \in FS_2$ (۳۱)

P_{23}: $\max f_1(x) = {x_2}^2$
$\min f_2(x) = x_2$
$\min f_3(x) = 2\,x_2$
Subject to:
$X \in FS_2$ (۳۲)

P_3:

P_{31}: $\min f_1(x) = 2(x_3 + 1)^2$
$\max f_2(x) = 2{x_3}^2$
$\max f_3(x) = {x_3}^2$
Subject to:
$X \in FS_3$ (۳۳)

P_{32}: $\min f_1(x) = 3(x_3 + 1)^2$
$\max f_2(x) = 3{x_3}^2$
$\max f_3(x) = 2{x_3}^2$
Subject to:
$X \in FS_3$ (۳۴)

P_{33}: $\max f_1(x) = 2(x_3 + 1)^2$
$\min f_2(x) = 2{x_3}^2$
$\min f_3(x) = {x_3}^2$
Subject to:
$X \in FS_3$ (۳۵)

گام ۳- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی را محاسبه می‌کنیم

در این مرحله مقادیر بیشینه و کمینه هر یک از اهداف را بدون در نظر گرفتن سایر اهداف محاسبه می کنیم. مقادیر ایده آل های مثبت برای هر یک از اهداف در جدول(۱) آمده است.

جدول۱- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت برای هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_1

		f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
P_{11}	$\min f_1$	0^*	2	1	1	0	0
	$\max f_1$	0.4445	3.3333^-	2.7779	1.6667	0	0
	$\max f_1$	0.4445	3.3333	2.7778^*	1.6667	0	0
P_{12}	$\min f_1$	0^-	4	2	1	0	0
	$\max f_1$	0.8890	6.6667^*	5.5558	1.6667	0	0
	$\max f_1$	0.8890	6.6667	5.5556^-	1.6667	0	0
P_{13}	$\max f_1$	1^*	0	0	0	0	0
	$\min f_1$	1	0^-	0	0	0	0
	$\min f_1$	1	0	0^*	0	0	0

PIS: ${f_{11}}^* = ({f_1}^*, {f_2}^*, {f_3}^*) = (0, 3.3333, 2.7778).$

${f_{12}}^* = ({f_1}^*, {f_2}^*, {f_3}^*) = (0, 6.6667, 5.5556).$

${f_{13}}^* = ({f_1}^*, {f_2}^*, {f_3}^*) = (1, 0, 0).$

همچنین مقادیر ایده آل های منفی برای هر یک از اهداف در جدول (۲) آمده است.

جدول۲- مقادیر ایده‌آل‌های منفی برای هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_1

		f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
P_{11}	$\max f_1$	1^-	0	0	0	0	0
	$\min f_1$	1	0^-	0	0	0	0
	$\min f_1$	1	0	0^-	0	0	0
P_{12}	$\max f_1$	2^*	0	0	0	0	0
	$\min f_1$	2	0^-	0	0	0	0
	$\min f_1$	2	0	0^*	0	0	0
P_{13}	$\min f_1$	0^-	2	1	1	0	0
	$\max f_1$	0.4445	3.3334^*	2.7779	1.6667	0	0
	$\max f_1$	0.4445	3.3333	2.7778^-	1.6667	0	0

$$
\begin{aligned}
\text{NIS: } f_{11}{}^{-} &= (f_1{}^{-}, f_2{}^{-}, f_3{}^{-}) = (1, 0, 0)\\
f_{12}{}^{-} &= (f_1{}^{-}, f_2{}^{-}, f_3{}^{-}) = (2, 0, 0)\\
f_{13}{}^{-} &= (f_1{}^{-}, f_2{}^{-}, f_3{}^{-}) = (0, 3.3333, 2.7778)
\end{aligned}
$$

با بهره‌گیری از مقادیر محاسبه شده PIS, NIS در گام قبلی، توابع d^{NIS} and d^{PIS} را تشکیل می‌دهیم به صورت زیر:

$$
\begin{aligned}
d_1{}^{PIS} = {} & \frac{1}{3}\left(\frac{(x_1-1)^2-0.0000}{1.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3.3333-2x_1}{3.3333-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2.7778-x_1{}^2}{2.7778-0.0000}\right) + \\
& \frac{1}{3}\left(\frac{2(x_1-1)^2-0.0000}{2.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{6.6667-4x_1}{6.6667-0.0000}\right) \\
& + \frac{1}{3}\left(\frac{5.5556-2x_1{}^2}{5.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1.0000-(x_1-1)^2}{1.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_1-0.0000}{3.3333-0.0000}\right) + \\
& \frac{1}{3}\left(\frac{x_1{}^2-0.0000}{2.7778-0.0000}\right) \qquad (۳۶)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_1{}^{NIS} = {} & \frac{1}{3}\left(\frac{1.0000-(x_1-1)^2}{1.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_1-0.0000}{3.3333-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_1{}^2-0.0000}{2.7778-0.0000}\right) + \\
& \frac{1}{3}\left(\frac{2.0000-2(x_1-1)^2}{2.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4x_1-0.0000}{6.6667-0.0000}\right) \\
& + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_1{}^2-0.0000}{5.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{(x_1-1)^2-0.0000}{1.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3.3333-2x_1}{3.3333-0.0000}\right) + \\
& \frac{1}{3}\left(\frac{2.7778-x_1{}^2}{2.7778-0.0000}\right) \qquad (۳۷)
\end{aligned}
$$

گام ۴- مقادیر بهینه را برای d^{NIS} and d^{PIS} در قالب جدول زیر می‌آوریم.

جدول۳- مقادیر ایده آل‌های مثبت و منفی برای توابع $d_1{}^{PIS}$ و $d_1{}^{NIS}$برای مساله P_1

	ایده آل مثبت	ایده آل منفی
$\min d_1{}^{PIS}$	2.6667	3.5185
$\max d_1{}^{NIS}$	2.1852	1.3333

گام ۴-۱- با استفاده از مقادیر محاسبه شده در گام قبلی ، توابع عضویت به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\mu_1(x) = -0.2504{x_1}^2 - 1.0175x_1 \tag{۳۸}$$

$$\mu_2(x) = -0.2133{x_1}^2 - 0.4667x_1 + 1.1852 \tag{۳۹}$$

گام ۴-۲- مساله نهایی را نوشته و آن را حل می کنیم تا جواب نهایی بدست آید.

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &= 0.2504{x_1}^2 - 1.0175x_1 \ \geq \lambda \\ &-0.2133{x_1}^2 - 0.4667x_1 + 1.1852 \geq \lambda \\ &0 \leq \lambda \leq 1,\ X \in FS_1 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

$\lambda^* = 0.0000 \qquad {x_1}^* = 0$

که در آن λ^* سطح رضایت بخشی و ${x_1}^*$ جواب نهایی سازشی می باشد.

شبیه زیر مساله یک، این مقادیر را برای زیر مساله دوم نیز تکرار می‌کنیم. مقادیر ایـده‌آل‌هـای مثبت و منفی برای مساله دوم به صورت زیر محاسبه می‌گردد که در شکل (۴) نشان داده شـده است.

جدول۴- مقادیر ایده آل های مثبت برای هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_2

		f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
	$\min f_1$	0^*	0	0	0	0	0
P_{21}	$\max f_1$	4	2^*	4	0	2	0
	$\max f_1$	4	2	4^*	0	2	0
	$\min f_1$	0^*	0	0	0	0	0
P_{22}	$\max f_1$	12	4^*	6	0	2	0
	$\max f_1$	12	4	6^*	0	2	0
	$\max f_1$	4^*	2	4	0	2	0
P_{23}	$\min f_1$	0	0^*	0	0	0	0
	$\min f_1$	0	0	0^*	0	0	0

همچنین مقادیر ایده‌آل‌های منفی هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف به صورت زیر می‌باشد.

جدول۵- مقادیر ایده‌آل‌های منفی برای هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_2

		f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
	$\max f_1$	4^*	2	4	0	2	0
P_{21}	$\min f_1$	0	0^*	0	0	0	0
	$\min f_1$	0	0	0^*	0	0	0
	$\max f_1$	12^*	4	6	0	2	0
P_{22}	$\min f_1$	0	0^*	0	0	0	0
	$\min f_1$	0	0	0^*	0	0	0
	$\min f_1$	0^*	0	0	0	0	0
P_{23}	$\max f_1$	4	2^*	4	0	2	0
	$\max f_1$	4	2	4^*	0	2	0

پس از تعیین مقادیر ایده‌آل‌ها، در این مرحله با توجه به داده‌های گام قبل، مقادیر ${d_2}^{PIS}$ و ${d_2}^{NIS}$ به عنوان توابعی برای نشان دادن میزان نزدیکی و دوری مقادیر ایده آل از توابع بررسی می گردند.

$$d_2^{PIS} = \frac{1}{3}\left(\frac{x_2{}^2-0.0000}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2.0000-x_2}{2.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-2x_2}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3x_2{}^2-0.0000}{12.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-2x_2}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{6.0000-3x_2}{6.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-x_2{}^2}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_2-0.0000}{2.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_2-0.0000}{4.0000-0.0000}\right) \tag{۴۱}$$

$$d_2^{NIS} = \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-x_2{}^2}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_2-0.0000}{2.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_2-0.0000}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{12.0000-3x_2{}^2}{12.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_2-0.0000}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3x_2-0.0000}{6.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_2{}^2-0.0000}{4.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2.0000-x_2}{2.0000-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-2x_2}{4.0000-0.0000}\right) \tag{۴۲}$$

جدول۶- مقادیر ایده آل های مثبت و منفی برای توابع $d_2{}^{PIS}$ و $d_2{}^{NIS}$ برای مساله P_2

	ایده‌آل مثبت	ایده آل‌منفی
$\min d_2{}^{PIS}$	1.3333	1.6667
$\max d_2{}^{NIS}$	1.6667	1.3333

توابع عضویت محاسبه شده به صورت روابط زیر محاسبه گردیده است.

$$\mu_1(x) = 0.2499x_2{}^2 - x_2 + 1 \tag{۴۳}$$

$$\mu_2(x) = 0.25x_2{}^2 - 0.9998x_2 + 0.8519 \tag{۴۴}$$

در این مرحله با بهره گرفتن از مقادیر توابع عضویت گام قبل، یک مساله برنامه‌ریزی تک هدفه تشکیل می‌دهیم. و سپس با حل این مساله برنامه‌ریزی مقدار جواب بهینه برای زیر مساله دوم محاسبه می گردد.

$$
\begin{aligned}
&\max \lambda \\
&0.2499{x_2}^2 - x_2 + 1 \ \geq \lambda \\
&0.25{x_2}^2 - 0.9998x_2 + 0.8519 \ \ \geq \lambda \\
&0 \leq \lambda \leq 1,\ X \in FS_2 \\
&\lambda^* = 0.8519 \qquad {x_2}^* = 0
\end{aligned}
\tag{۴۵}
$$

همانند مسائل ۱و ۲، زیر مساله سوم نیز با همان روش محاسبه می گردد. به این ترتیب ابتدا جدول (۶) شامل مقادیر ایده آل مثبت را تشکیل می‌دهیم.

جدول۷- مقادیر ایده آل های مثبت برای هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_3

		f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
	$\min f_1$	2^*	0	0	0	0	0
P_{31}	$\max f_1$	10.8889	3.5556^*	1.7778	0	0	1.3333
	$\max f_1$	10.8889	3.5556	1.7778^*	0	0	1.3333
	$\min f_1$	3^*	0	0	0	0	0
P_{32}	$\max f_1$	16.3333	5.3333^*	3.5556	0	0	1.3333
	$\max f_1$	16.3333	5.3333	3.5556^*	0	0	1.3333
	$\max f_1$	10.8889^*	3.5556	1.7778	0	0	1.3333
P_{33}	$\min f_1$	2	0^*	0	0	0	0
	$\min f_1$	2	0	0^*	0	0	0

مقادیر ایده‌آل‌های منفی نیز در جدول (۸) آمده است.

جدول۸- مقادیر ایده‌آل‌های منفی برای هر یک از اهداف بدون در نظر گرفتن سایر اهداف برای مساله P_3

		f_1	f_2	f_3	x_1	x_2	x_3
P_{31}	$\max f_1$	10.8889^*	3.5556	1.7778	0	0	1.3333
	$\min f_1$	2	0^*	0	0	0	0
	$\min f_1$	2	0	0^*	0	0	0
P_{32}	$\max f_1$	16.3333^*	5.3333	3.5556	0	0	1.3333
	$\min f_1$	3	0^*	0	0	0	0
	$\min f_1$	3	0	0^*	0	0	0
P_{33}	$\min f_1$	2^*	0	0	0	0	0
	$\max f_1$	10.8889	3.5556^*	1.7778	0	0	1.3333
	$\max f_1$	10.8889	3.5556	1.7778^*	0	0	1.3333

پس از محاسبه مقادیر ایده‌آل‌ها توابع بیان کننده میزان دوری و نزدیکی به ایده‌آل‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$d_3^{PIS} = \frac{1}{3}\left(\frac{2(x_3+1)^2-0.0000}{10.8889-2.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2.0000-2x_3^2}{3.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-x_3^2}{1.7778-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3(x_3+1)^2-0.0000}{16.3333-3.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-3x_3^2}{5.3333-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{6.0000-2x_3^2}{3.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-2(x_3+1)^2}{10.8889-2.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_3^2-0.0000}{3.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_3^2-0.0000}{1.7778-0.0000}\right) \quad (۴۶)$$

$$d_3^{NIS} = \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-2(x_3+1)^2}{10.8889-2.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_3^2-0.0000}{3.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x_3^2-0.0000}{1.7778-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{12.0000-3(x_3+1)^2}{16.3333-3.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3x_3^2-0.0000}{5.3333-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x_3^2-0.0000}{3.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2(x_3+1)^2-0.0000}{10.8889-2.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2.0000-2x_3^2}{3.5556-0.0000}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4.0000-x_3^2}{1.7778-0.0000}\right) \quad (۴۷)$$

مقادیر بیشینه و کمینه توابع دوری و نزدیکی در جدول (۹) آمده است.

دول۹- مقادیر ایده‌آل‌های مثبت و منفی برای توابع ${d_3}^{PIS}$ و ${d_3}^{NIS}$ برای مساله P_3

	ایده‌آل‌مثبت	ایده آل‌منفی
$\min {d_1}^{PIS}$	3.1070	3.1086
$\max {d_1}^{NIS}$	5.0125	4.9937

توابع عضویت با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mu_1(x) = -0.2625{x_3}^2 + 0.15x_3 + 1.7875 \quad (۴۸)$$

$$\mu_2(x) = 1.05{x_3}^2 - 0.15x_3 + 1.1074 \quad (۴۹)$$

پس از استفاده از مدل ارائه شده، جواب بهینه نهایی به صورت زیر محاسبه خواهید گردید. به صورت زیر:

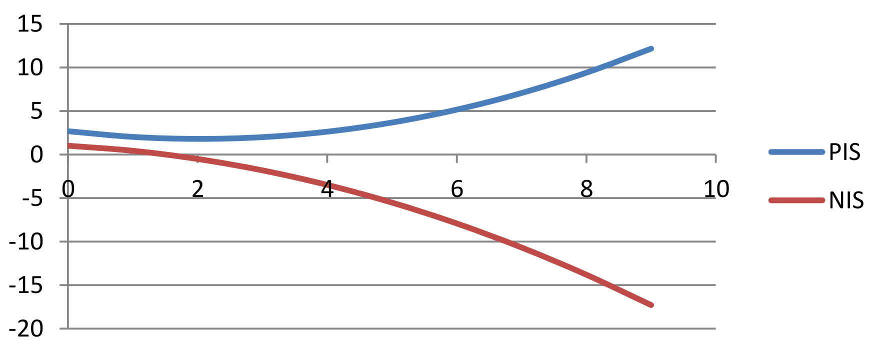
$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &-0.2625{x_3}^2 + 0.15x_3 + 1.7875 \ \geq \lambda \\ &1.05{x_3}^2 - 0.15x_3 + 1.1074 \geq \lambda \\ &0 \leq \lambda \leq 1,\ X \in FS_3 \end{aligned} \quad (۵۰)$$

$$\lambda^* = 1.000 \qquad {x_3}^* = 0$$

آنالیز نتایج

در این مثال همان طور که نشان داده شد، یک مساله سه هدفه مطرح گردید. که هریک از اهداف و محدودیت‌ها در فضای سه بعدی مطرح می‌گردند.

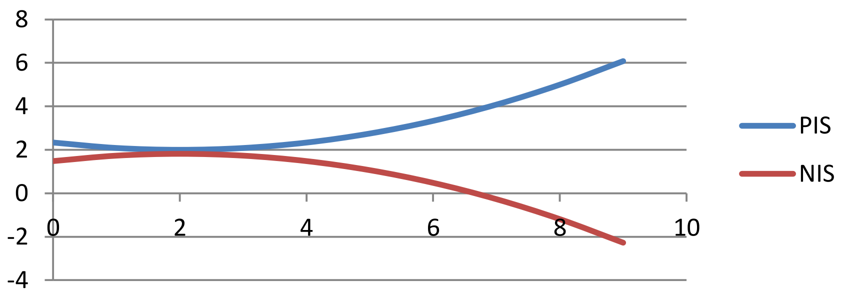
علاوه بر این، $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ مطرح می‌گردد که در آن x_1^*, x_2^*, x_3^* به ترتیب از حل سه زیر مساله مستقل از همدیگر P_1, P_2, P_3 بدست آمده اند. همچنین محدودیت‌ها نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند. یک دسته محدودیت‌هایی هستند که مختص هر یک از متغیرهای x_1 و x_2 و x_3 می باشند که هر یک از محدودیت‌های خاص هر متغیر به همراه زیر مساله مربوط به همان متغیر مطرح می‌گردند. دسته دیگر محدودیت‌ها نیز محدودیت‌های عمومی می‌باشند که می‌توانند شامل همگی یا تعدادی از متغیر هاد باشند. در حقیقت به جای بررسی جواب بهینه در یک فضای سه بعدی، تابع هدف را در یک فضای یک بعدی جستجو می-کنیم. مقدار سطح مورد قبول و رضایت بخش ${\alpha_1}^*$ بر اساس طرح مساله در فضای یک بعدی وابسته به x_1 محاسبه گردیده است. در حقیقت با افزوده شدن بر مقدار x_1، همزمان مقدار تابع d^{NIS} نیز به عنوان دور شدن از ایده‌آل‌های منفی می‌باشد. همچنین مقدار تابع d^{PIS} به عنوان میزان نزدیکی به ایده‌آل‌های مثبت نیز کاهش می‌یابد. مقدار بهینه برای متغیر x_1 برابر است با: $x_1 = 0.0000$. رفتارهای توابع d^{PIS} و d^{NIS} در شکل (۵) آمده است.



شکل ۵- نمودار روند تغییرات توابع d^{PIS} و d^{NIS} برای زیر مساله اول

همان طور که در شکل (۵) نشان داده شده است هر چه از نقطه صفر به سمت نقطه دو، حرکت می‌کنیم از مقدار d^{PIS} کاسته شده و بر مقدار d^{NIS} افزوده می‌گردد. ولی همزمان به دو مورد دیگر باید همزمان توجه داشت. اولاً اینکه باید به محدودیت متغیر توجه داشته باشیم و ثانیاً اینکه سطح ارضا λ باید بین صفر و یک باشد. که با در نظر گرفتن هر دو نکته مقدار بهینه مقدار صفر خواهد بود.

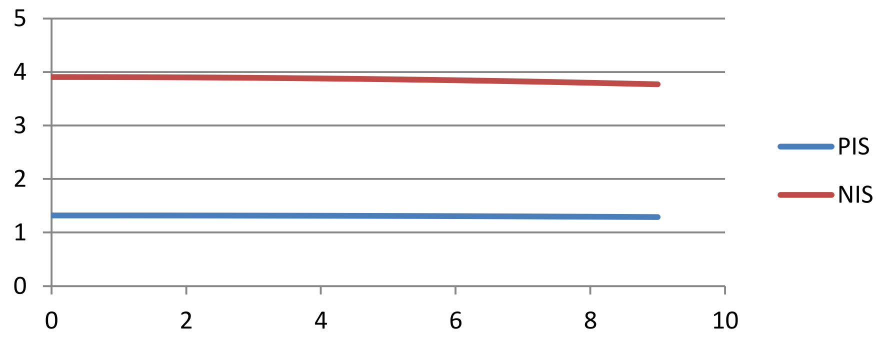
شبیه مسئله اول، مسائل دوم و سوم نیز به همین ترتیب محاسبه می گردند. نوع رفتار تابع برای زیر مسئله ۲در شکل (۶) آمده است.



شکل ۶- نمودار روند تغییرات توابع d^{PIS} و d^{NIS} برای زیر مساله دوم

همان طور که در شکل نشان داده شده است هر چه از نقطه صفر به سمت نقطه دو حرکت می‌کنیم، از مقدار d^{PIS} کاسته شده و بر مقدار d^{NIS} افزوده می‌گردد. ولی همزمان به دو مورد دیگر باید همزمان توجه داشت. اولا اینکه باید به محدودیت متغیر توجه داشته باشیم و ثانیاً اینکه سطح ارضا λ باید بین صفر و یک باشد که با در نظر گرفتن هر دو نکته مقدار بهینه مقدار صفر خواهد بود.

شبیه مسئله اول، مسائل دوم و سوم نیز به همین ترتیب محاسبه می‌گردند. رفتار توابع مورد بررسی برای زیر مساله سوم نیز در شکل (۷) مطرح گردیده است.



شکل ۷- نمودار روند تغییرات توابع $\boldsymbol{d^{PIS}}$ و $\boldsymbol{d^{NIS}}$ برای زیر مساله اول

همان طور که از شکل (۷) پیداست مقدار تابع d^{PIS} در نقطه صفر کمترین و نیز تابع d^{NIS} در نقطه صفر بیشترین مقدار خود را دارند. بنابراین نقطه $x_3{}^* = 0$ به عنوان اولین پیشنهاد مطرح می گردد. حال با بررسی محدودیت متغیر ها معلوم می شود که از نظر محدودیت این نقطه قابل قبول است، در عین حال مقدار سطح رضایت نیز که $\lambda^* = 1.000$ بدین معنی که این جواب با بیشترین سطح امکان پذیری قابل قبول بدست آمده است. بنابراین همان جواب تایید می گردد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله تاکید اصلی بر روی استفاده از روش تاپسیس به عنوان یک روش تصمیم گیری سازگار است که به منظور حل مسائل برنامه ریزی مقیاس بزرگ فازی با ساختار بلوکی زاویه‌دار می‌باشد. در این روش ابتدا از منطق دانتزیگ- وولف مساله از فضای n- بعدی به مسائل کوچکتر در فضای یک بعدی تبدیل می‌شود.

در روش ارائه شده هر مساله فازی به سه مساله غیر فازی تبدیل شد. سپس جواب‌های بهینه برای هر یک توابع هدف قطعی شده بدست آمد. پس از آن، روش تاپسیس به عنوان یک روش سازشی تصمیم گیری برای بدست آوردن توابعی برای ارزیابی میزان نزدیکی به ایده‌آل مثبت و دوری از ایده آل منفی به کار برده شد. سپس روش بهینه سازی زیمرمن برای حل

مساله دو هدفه و تبدیل آن به یک مساله یک هدفه به کار برده شد. به طور کلی یک مساله n- بعدی به یک مساله یک بعدی کاهش داده شد. در این مدل توابع هدف و محدودیت‌ها می‌توانند به صورت غیر خطی و حتی غیر محدب باشند. در نهایت نیز برای بیشتر روشن شدن مدل ارائه شده، یک مثال ارائه گردید و جواب بهینه برای آن بدست آمد. بررسی مدل ارائه شده در سایر انواع داده های غیر قطعی مثل داده های خاکستری می‌تواند به عنوان موضوعی برای تحقیقات آتی مطرح گردد. همچنین بررسی روش حل به کمک سایر روش‌های تصمیم گیری نیز از دیگر موضوعاتی است که می‌تواند به عنوان یک موضوح تحقیق مورد مطالعه قرار گیرد.

مراجع

اصغرپور، محمد جواد، (۱۳۸۹)، تصمیم‌گیری های چند معیاره، چاپ هفتم، دانشگاه تهران.

مهرگـان، محمدرضـا، (۱۳۹۱)، پـژوهش عملیـاتی پیشـرفته، چـاپ دهـم، انتشـارات کتـاب دانشگاهی، تهران، ایران.

Abo-Sinna, M. A; Amer, A. H; 2005. extensions of topsis for multi-objective large-scale nonlinear programming problems. applied mathematics and computation 162, 243–256.

Abo-Sinna, M. A; Amer, A. H; A. S. Ibrahim; 2008. extensions of TOPSIS for multi-objective large-scale nonlinear programming problems with block angular structure. Applied Mathematical Modelling 32, 292–302.

Abo-Sinna, M.A; Abou-El-Enie, T.H.M; 2006. An interactive algorithm for large scale multiple objective programming problems with fuzzy parameters through TOPSIS approach, Appl. Math. Comput. 177, 515–527.

Bellman, R; Zadeh, L.A; 1970. Decision making in a fuzzy environment. Management Science 17 (4), 141–164.

Carpentier, J; 1962 .“ contribution a. ‘1’ etude du dispatching economique, “ bulletin de la societe francaise des electronics, vol. 3’pp. 431-447’ aug.

Dantzig, G; Wolfe, P; 1961. The decomposition algorithm for linear programming. Econometrica 29, 767–778.

Elisangela, M; Camargo, R. S, Miranda, G; 2013. An improved Benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. European Journal of Operational Research Volume 226, Issue 2, 185–202.

El-Sawy, A. A; El-Khouly, N.A; Abou-El-Enien,T.H.M; 2000. An algorithm for decomposing the parametric space in large scale linear vector optimization problems: a fuzzy approach. Journal of Advances in Modelling and Analysis 55 (2), 1–16.

Gioan, E; Paul, C; 2012. Split decomposition and graph-labelled trees: Characterizations and fully dynamic algorithms for totally decomposable graphs. Discrete Applied Mathematics Volume 160, Issue 6, 708–733.

Guillaume, C; 2010. Nearly optimal algorithms for the decomposition of multivariate rational functions and the extended Lüroth Theorem. Journal of Complexity Volume 26, Issue 4, 344–363.

Heydari, M; Sayadi, M.K; Shahanaghi, K; 2010. extended vikor as a new method for solving multiple objective large-scale nonlinear programming problems. RAIRO Operations Research 44, 139–152.

Hu, C; Shen, Y; Li, S; 2009. An interactive satisficing method based on alternative tolerance for fuzzy multiple objective optimization. Applied Mathematical Modelling 33, 1886–1893.

Hwang, Ch. L; Yoon, K;1981. Multiple attribute decision making-methods and applications. Heidelberg: Springer-Verlag.

Ibrahim, A. B; 2014. Interactive TOPSIS algorithms for solving multi-level non-linear multi-objective decision-making problems. Applied Mathematical Modelling, 38(4), 1417-1433.

Jolai, F; Yazdian, S.A; Shahanaghi, K; Azari-Khojasteh, M; 2011. Integrating fuzzy TOPSIS and multi-period goal programming for purchasing multiple products from multiple suppliers. Journal of Purchasing & Supply Management 17, 42–53.

Kovaleva, A; 2010. The Melnikov criterion of instability for random rocking dynamics of a rigid block with an attached secondary structure. Nonlinear Analysis: Real World Applications Volume 11, Issue 1, 472–479.

Laureano, F. E; Araceli, M. G; Pérez, P; Unzueta, A; 2013. Scenario Cluster Decomposition of the Lagrangian dual in two-stage stochastic mixed 0–1 optimization. Computers & Operations Research Volume 40, Issue 1, 362–377.

Liu, S; Chen, F. T. S; Ran, W; 2013. Multi-attribute group decision-making with multi-granularity linguistic assessment information: An improved approach based on deviation and TOPSIS. Applied Mathematical Modelling, 37(24), 10129-10140.

Mahdavi, I; Mahdavi-Amiri, N; Heidarzade, A; Nourifar, R; 2008. Designing a model of fuzzy TOPSIS in multiple criteria decision making. Applied Mathematics and Computation 206, 607–617.

Sakawa, M; 2000.Large Scale Interactive Fuzzy Multi objective Programming. Physica-Verlag , A Springer-Verlag Company,New York.

Sakawa, M; Sawada, M.K; Inuiguchi,M; 1995. A fuzzy satisficing method for largescale linear programming problems with block angular structure. European Journal of Operational Research 81, 399–409.

Shidpour, H; Shahrokhi, M; Bernard, A; 2013. A multi-objective programming approach, integrated into the TOPSIS method, in order to optimize product design; in three-dimensional concurrent engineering. Computers & Industrial Engineering, 64(4), 875-885.

Stanciulescu, C; Fortemps, P.H; Installe, M; Wertz, V; 2003. “Multiobjective fuzzy linear programming problems with fuzzy decision variables”, European Journal of Operational Research 149 , 654–675.

Torabi, S.A; Hassini, E; 2008. “An interactive possibilistic programming approach for multiple objective supply chain master planning”. Fuzzy Sets and Systems 159 , 193 – 214.

Vahdani, B; Hadipour, H; Sadaghiani, J-S, Amiri, M; 2010. Extension of VIKOR method based on interval-valued fuzzy sets. Int J Adv Manuf Technol 47:1231–1239.

Vahdani, B; Mousavi, S.M; Hashemi, H; Mousakhani, M; Tavakkoli-Moghaddam, R; 2013. A new compromise solution method for fuzzy group decision-making problems with an application to the contractor selection. Engineering Applications of Artificial Intelligence. Article in press.

Winston; wayne, L; 1994.Operations Research: Applications and Algorithms. Son publishing.

Zadeh, L.A; 1965. Fuzzy sets. Information and Control 8, 338–353.

Zimmermann, H. J; 1978.“Fuzzy programming and linear programming with several objective functions”, Fuzzy Sets and Systems 1, 45-55.