فصلنامه علمی ـ پژوهشی مطالعات مدیریت صنعتی سال دهم، شماره ۲۷، زمستان ۹۱
صفحات ۸۹ تا ۱۱۲

محاسبۀ میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی و ماتریس‌های مقایسات زوجی در فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی

محمد حسین آرمان *
جمشید صالحی صدقیانی **
سارا مژدهی ***
علی نظرلی****

چکیده

هرگاه عمل تصمیم‌گیری با چند گزینه و چند معیار روبرو باشد، می‌توان از روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) استفاده کرد. این روش دارای یک ساختار سلسله مراتبی است و اساس آن بر مقایسۀ زوجی معیارها و مقایسۀ زوجی گزینه‌ها (نسبت به هر معیار) نهفته است. برای محاسبۀ میزان ناسازگاری ماتریس مقایسات زوجی و محاسبۀ میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی، دو الگوریتم مجزا ارائه گردیده است. در این مقاله، این الگوریتم‌ها برای محاسبۀ مقدارهای ناسازگاری در فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی توسعه داده شده و وزن گزینه‌ها نیز از بسط فازی روش‌های تقریبی به‌دست آمده است. برای روشن شدن این روش یک مثال عددی نیز آورده شده است.

واژگان کلیدی: فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی، میزان ناسازگاری فازی، رتبه‌بندی فازی.

* موسسه آموزش عالی غیرانتفاعی هشت بهشت (نویسنده مسئول) hosein.arman@yahoo.com
** استاد گروه مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی
*** دانشجوی دکتری مدیریت تولید و عملیات دانشگاه علامه طباطبایی
**** کارشناس ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبایی

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۸/۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۸۹/٤/۱۱

مقدمه

آذر در کتاب خود، فرایند تحلیل سلسله مراتبی را یکی از معروف‌ترین فنون تصمیم‌گیری چند شاخصه معرفی می‌کند که توسط ساعتی در دههٔ ۱۹۷۰ ابداع گردیده است. اساس این روش را در مقایسات زوجی (به‌صورت میزان نهایی جانشینی) نهفته می داند. ماتریس‌های مقایسات زوجی ممکن است سازگار و یا ناسازگار باشند. ماتریس سازگار به این صورت تعریف می‌گردد که: اگر n معیار به شرح $C_1, C_2, ..., C_n$ داشته باشیم و ماتریس مقایسهٔ زوجی آنها به‌صورت $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ باشد (a_{ij} نشان‌دهندهٔ ترجیح عنصر C_i بر C_j است)، چنانچه در این ماتریس داشته باشیم $a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}$ آنگاه می گوییم ماتریس A سازگار است. کنترل سازگاری تصمیم از مزایای روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی است. به عبارت دیگر در این روش همواره می‌توان میزان ناسازگاری تصمیم را محاسبه نمود و نسبت به خوب و بد بودن و یا قابل قبول و مردود بودن آن قضاوت کرد. در حالت کلی می‌توان گفت که میزان ناسازگاری قابل قبول یک ماتریس یا سیستم بستگی به تصمیم‌گیرنده دارد، اما ساعتی عدد ۰٫۱ را به عنوان حد قابل قبول ارائه می‌نماید و معتقد است چنانچه میزان ناسازگاری بیشتر از ۰٫۱ باشد بهتر است در قضاوتها تجدید نظر گردد. برای محاسبهٔ میزان ناسازگاری یک ماتریس و میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی، می‌توان از الگوریتم‌هایی که برای این منظور ارائه شده‌اند استفاده کرد [۱].

قدسی‌پور بیان می‌کند که در فرایند تحلیل سلسله مراتبی، محاسبهٔ وزن در دو قسمت جداگانه مورد بحث قرار می گیرد: وزن نسبی و وزن مطلق (نهایی). وزن نسبی از ماتریس مقایسهٔ زوجی به‌دست می‌آید، درحالیکه وزن مطلق، رتبهٔ نهایی هر گزینه است که از تلفیق وزن‌های نسبی محاسبه می‌گردد. اگر ماتریس مقایسهٔ زوجی سازگار باشد، محاسبهٔ وزن ساده بوده و از نرمال کردن عناصر هر ستون به‌دست می‌آید. اما در حالتی که ماتریس ناسازگار باشد، محاسبهٔ وزن ساده نبوده و برای به‌دست آوردن آن، چهار روش عمده مطرح می‌کند که عبارتند از روش حداقل مربعات، روش حداقل مربعات لگاریتمی، روش بردار ویژه، و روش‌های تقریبی. روش‌های تقریبی بدین علت پیشنهاد شده‌اند که سه روش اول دارای محاسبات بسیار است. این روش‌ها عمدتاً تقریبی از روش بردار ویژه هستند که با دقت‌های مختلف، محاسبات را تسهیل

می‌نمایند. عمدهٔ این روش‌ها عبارتند از: روش مجموع سطری، روش مجموع ستونی، روش میانگین حسابی و روش میانگین هندسی. هر چند مقادیر وزن‌ها در این روش‌های تقریبی متفاوت است، اما نحوهٔ اولویت‌ها تفاوتی نمی‌کند. بعد از به‌دست آوردن وزن نسبی عناصر تمام ماتریس‌های مقایسات زوجی، وزن نهایی گزینه‌ها محاسبه می‌شوند. وزن نهایی هر گزینه در یک فرایند سلسله مراتبی، از مجموع حاصل ضرب اهمیت معیارها در وزن گزینه‌ها به‌دست می‌آید [۳].

اصغرپور به نقل از ساعتی بیان می‌کند که هر چند روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی، روشی براساس تحلیل مغز انسان برای مسائل پیچیده و فازی است، اما در این روش مستقیماً از اعداد فازی استفاده نمی‌شود، بلکه فازی بودن بطور غیر مستقیم از ترجیحات گزینه‌ها نسبت به هم، با یک ساختار رده‌ای استفاده می‌شود [۲]. بنابراین برای به‌کارگیری فرایند تحلیل سلسله مراتبی به‌صورت فازی، روش‌هایی پیشنهاد شده است. در این مقاله نیز ابتدا روش "میانگین حسابی" که از روش‌های تقریبی محاسبهٔ اوزان نسبی است، برای استفاده از اعداد فازی بسط داده شده و سپس الگوریتم‌هایی نیز برای محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس و سلسله مراتبی فازی ارائه شده است.

مرور پیشینهٔ تحقیق

تئوری مجموعه فازی

عسگری زاده برای بیان متغیرهای زبانی و مفاهیم تقریبی به‌صورت کمی «تئوری مجموعه فازی» را مطرح نمود. این تئوری بیان می‌کند که اگر X مجموعهٔ مرجع باشد، آنگاه مجموعهٔ فازی $\tilde{A}$ در X به‌صورت مجموعهٔ دو عضوی $\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x)\mid x\in X\}$ بیان می‌شود که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بیانگر درجهٔ عضویت x در مجموعه فازی $\tilde{A}$ و عددی بین صفر تا یک است. به عبارت دیگر x جزو مجموعهٔ فازی $\tilde{A}$ با یک درجهٔ عضویت است. برای تعمیم مفاهیم ریاضی قطعی به مجموعه های فازی از اصل گسترش استفاده می‌شود. این اصل از مفاهیم اساسی تئوری مجموعه‌های فازی است و در تعمیم عملگرهای جبری و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی بسیار مفید است. از آنجا که ریاضیات اعداد فازی مبتنی بر ریاضیات بازه‌ها است، می‌توان برخی از عملگرهای ریاضی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، معکوس و ضرب اسکالر) بر دو بازهٔ مثبت A و B

را به‌صورت زیر نشان داد [۴]:

$$\forall a,b,c,d \in R^{+}, A=[a,b], B=[c,d]$$
$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$$
$$[a,b].[c,d]=[ac,bd]$$
$$[a,b]\div[c,d]=[\frac{a}{d},\frac{b}{c}]$$
$$[a,b]^{-1}=[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$$
$$k[a,b]=[ka,kb]$$

فرمولهای فوق بر دامنۀ مثبت اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. حال اگر این فرمولها بر دامنۀ مثبت و منفی اعداد حقیقی تعریف شوند، فرم کلی آنها تغییر خواهد کرد. مثلاً حاصل ضرب و تقسیم دو بازۀ فوق بر دامنۀ مثبت و منفی اعداد حقیقی، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$[a,b].[c,d]=\left[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}\right]$$
$$[a,b]\div[c,d]=[\min\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\},\max\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\}]$$

در ادامه به توضیح و معرفی برخی اعداد فازی پرداخته می‌شود. به طور کلی یک عدد فازی، تعمیمی است از یک عدد معمولی که دارای این خواص باشد: محدب باشد، نرمال باشد و قطعه به قطعه پیوسته باشد. دو عدد متعارف فازی عبارتند از: عدد فازی مثلثی و عدد فازی ذوزنقه ای. عدد فازی $\widetilde{A}=(a,b,c)$ را یک عدد فازی مثلثی گویند به طوری که تابع عضویت آن در بازۀ $[a,b]$ اکیداً صعودی و برابر با $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\frac{x-a}{b-a}$ و در بازۀ $[b,c]$ اکیداً نزولی و برابر با $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\frac{c-x}{c-b}$ باشد. b بُعد میانی و a و c به ترتیب پای چپ و پای راست عدد فازی مثلثی می باشند. همچنین عدد فازی $\widetilde{A}=(a,b,c,d)$ را یک عدد فازی ذوزنقه‌ای گویند به طوری که تابع عضویت آن در بازۀ $[a,b]$ اکیداً صعودی و برابر با $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\frac{x-a}{b-a}$، در بازۀ $[b,c]$ واحد و یکسان، و در بازۀ $[c,d]$ اکیداً نزولی و برابر با $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\frac{d-x}{d-c}$ باشد. b و c دو بُعد میانی و a و d به ترتیب پای چپ و پای راست عدد فازی ذوزنقه‌ای می باشند.

انجام اعمال ریاضی بر اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای همچون انجام اعمال ریاضی بر بازه‌ها است. به عنوان نمونه حاصل تقسیم عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ بر عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)$، برابر است با $\left(\frac{a_i}{d_j}, \frac{b_i}{c_j}, \frac{c_i}{b_j}, \frac{d_i}{a_j}\right)$ و یا معکوس عدد فازی $\widetilde{A}_i$ به‌صورت عدد فازی $\widetilde{A}_i' = (\frac{1}{d_i}, \frac{1}{c_i}, \frac{1}{b_i}, \frac{1}{a_i})$ به‌دست می‌آید. همچنین، توجه به این نکته ضروری است که حاصلِ جمع و تفریق بین اعداد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای)، خود یک عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) است، در صورتیکه حاصلِ ضرب و تقسیم بین این اعداد هر چند عددی فازی است، اما لزوماً مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) نیست.

فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی

برای به‌کارگیری فرایند تحلیل سلسله مراتبی به‌صورت فازی، روش‌های متعددی پیشنهاد شده است. از اولین تلاش‌ها برای فازی کردن (AHP) می‌توان به روش ارائه شده توسط دو محقق هلندی به نام‌های لارهوون و پدریک اشاره کرد که بر اساس روش حداقل مجذورات لگاریتمی بنا شده بود[۱۹]. اما تعداد محاسبات و پیچیدگی مراحل این روش باعث شده است که چندان مورد استفاده قرار نگیرد. بنابراین روش‌های ساده‌تری برای به‌کارگیری AHP به‌صورت فازی توسعه یافت که از آن جمله می‌توان به روش باکلی اشاره کرد. در این روش از اعداد فازی ذوزنقه‌ای استفاده می‌گردد و برای محاسبهٔ اوزان نیز از میانگین هندسی استفاده می‌شود[۵]. استم و دیگران، چگونگی توسعهٔ تکنیک هوش مصنوعی را برای تعیین یا تقریب رتبه‌بندی ترجیحات در AHP بررسی کردند. آنها نتیجه گرفتند که فرموله بندی شبکه های عصبی پیش رو، ابزار قدرتمندی برای تحلیل مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره با گزینه‌های گسسته و قضاوتهای ترجیحی مبهم یا نامعین هستند[۲۴]. چانگ روش جدیدی را برای به‌کارگیری AHP به‌صورت فازی با عنوان روش تحلیل توسعه‌ای ارائه کرد که اعداد مورد استفاده در این روش، اعداد فازی مثلثی بودند[۱۰]. چینگ‌سو الگوریتم جدیدی را برای ارزیابی سیستم‌های تاکتیکی پرتاب موشکی، به‌وسیلهٔ فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی و برمبنای درجه بندی کردن ارزش توابع عضویت پیشنهاد کرد[۱۳]. وک و دیگران با افزودن ریاضیات منطق فازی به روش کلاسیک AHP، روشی را برای ارزیابی گزینه‌های متفاوت سیکل تولیدی ارائه کردند. در این روش،

ارزیابی هر سیکل تولیدی به‌صورت یک مجموعهٔ فازی به‌دست می‌آید. سپس این ارزیابی‌های فازی با شکل دهی مرکز ثقل هر مجموعهٔ فازی، غیر فازی شده و در نهایت سیکل‌های متناوب تولیدی با توجه به هدف اصلی مسئله، به ترتیب رتبه‌بندی می‌شوند[۲۶]. کارامان و دیگران از یک روش عینی و ذهنی فازی، برای به‌دست آوردن اوزان گزینه‌ها از AHP و انجام یک ارزیابی موزون فازی استفاده کردند[۱۶]. دنگ رویکردی فازی را برای حل مسائل تحلیلی چند شاخصهٔ کمی به‌صورت یک روش ساده ارائه کرد[۱۵]. همچنین لی و دیگران نیز ایده های پایه‌ای AHP را مرور کرده و بر مبنای این ایده ها مفهوم بازهٔ مقایسه‌ای را معرفی کردند. سپس بر اساس بهینه سازی احتمالی، یک روش شناسی را برای دستیابی به سازگاری کلی و وفق سازی با طبیعت فازی فرایند مقایسه، پیشنهاد کردند[۲۰]. چنگ روش جدیدی را برای ارزیابی سیستم‌های جنگ افزاری، با روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی و بر اساس وزن متغیرهای زبانی پیشنهاد کردند[۱۲]. ژو و دیگران مبحثی را بر روش تحلیلی توسعه یافته و کاربردهای AHP فازی ارائه کردند[۲۷].

شان و دیگران برای انتخاب فناوری، الگوریتمی ارائه کردند که هر دو مزایای ملموس و غیر ملموس محیط فازی را به‌صورت کمی تبدیل می کرد و بر این اساس یک کاربرد از تئوری مجموعه های فازی را در تحلیل ساختار سلسله مراتبی و ارزیابی‌های اقتصادی توضیح دادند. آنها با یکپارچه سازی سلسله مراتب، وزن هر گزینهٔ فناوری را که شاخص مناسب فازی نامیده می شد، کسب کرده و با رتبه‌بندی این شاخص‌های مناسب فازی، رتبه و ترجیحات تکنولوژیهای مختلف را به‌دست آوردند. از دیدگاه ارزیابی اقتصادی، یک تحلیل جریان نقدی فازی به‌کار رفته است[۸]. شان و دیگران همچنین رویکرد یکپارچه ای را برای طراحی اتوماتیک سیستم‌های تولیدی انعطاف پذیر ارائه کردند که در آن از تکنیکهای تصمیم‌گیری چند معیاره و شبیه سازی استفاده می شد. فرایند طراحی شامل ساختار و آزمون گزینه‌های مختلف طراحی با استفاده از روش‌های شبیه سازی بود. از انتخاب مناسب‌ترین طراحی (بر اساس فرایند تحلیل سلسله مراتبی) برای تحلیل خروجی مدل‌های شبیه سازی سیستم تولید انعطاف پذیر استفاده شد. همچنین ابزارهای هوشمندی (از قبیل سیستم‌های خبره، سیستم‌های فازی و شبکه های عصبی) برای پشتیبانی از فرایند طراحی سیستم تولید

انعطاف پذیر توسعه یافتند و تکنیک فعال x برای یکپارچه سازی واقعی فرایند طراحی اتوماتیک سیستم تولیدی انعطاف پذیر و فرایند پشتیبانی هوشمند از تصمیم به‌کار گرفته شد[۹].

لیونگ و کائو تعریف فازی پایداری را با لحاظ کردن یک انحراف تولرانسی پیشنهاد کردند. ضرورتاً، نسبت‌های فازی بین اهمیتهای وابسته، و انحراف تولرانسی مجاز، به عنوان محدودیت‌هایی بر مقادیر عضویت مقایسات نسبی فرموله می‌شوند. اوزان فازی نسبی و نهایی از طریق اصل گسترش تعیین می‌شوند. گزینه‌ها بر اساس اوزان نهایی و با به‌کارگیری روش رتبه‌بندی حداکثر ـ حداقل، رتبه‌بندی می‌شوند [۲۱]. کوئو و دیگران یک سیستم پشتیبانی از تصمیم را برای جایابی یک انبار جدید توسعه دادند که اولین بخش از این سیستم پیشنهادی، توسعهٔ ساختار سلسله مراتبی برای فرایند تحلیل فازی است[۱۸]. سبسی [۶] و سبسی و کارامان [۷] نیز رضایت مشتریان از شرکتهای خدماتی خوار و باری در ترکیه را با استفاده از فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی اندازه گیری کردند. همچنین کارامان و دیگران نیز روشی را برای انتخاب تأمین کننده بر پایهٔ AHP فازی ارائه کرده‌اند[۱۷]. وانگ و دیگران نیز با مروری بر روش لگاریتم حداقل مجذورات در فرایند تحلیلی سلسله مراتبی، به عدم صحت این روش در نرمال سازی اوزان فازی اشاره می‌کنند[۲۵]. چانگ و دیگران همچنین رویکردی در قالب AHP، برای پایین آوردن عدم قطعیت و عدم صحت روش‌های محاسبه در فاز پیش انتقال و زمانی که قضاوت‌های خبرگان به‌صورت اعداد فازی سه گانه ارائه می‌شوند، پیشنهاد داده اند[۱۱]. دادورین برای اندازه گیری سیستم‌های ایمنی در محیط کار و با توجه به نیاز به رویکرد کل نگر برای این اندازه گیری، از رویکرد AHP که بطور هم‌زمان ارزیابی چند معیاره را ممکن می سازد، استفاده کرده است[۱۴]. مامت و دانیل نیز از تجزیه انفرادی وزن‌ها و رویکرد دوگانه در AHP فازی برای به‌دست آوردن زمان متوسط لازم برای رتبه‌بندی کاندیداها در گروه‌های بزرگ بهره جسته‌اند[۲۳]. لیو نیز با نگاهی مشابه یک ماتریس دو طرفه سازگار برای زمانی که داده‌ها اعداد مطلق هستند، پیشنهاد کرده است که در فرایند تصمیم‌گیری احتمال رسیدن به جواب‌های گمراه کننده را کاهش می‌دهد[۲۲].

محاسبهٔ میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی و ماتریس‌های مقایسات زوجی در فرایند تحلیل سلسله مراتبی فازی

در این بخش به ارائه روشی برای محاسبه وزن نسبی و نهایی گزینه‌ها در سلسله مراتب فازی پرداخته می‌شود. سپس الگوریتمهای موجود برای محاسبه میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی و همچنین الگوریتم محاسبه میزان ناسازگاری ساختار سلسله مراتبی برای به‌کارگیری در شرایط فازی بسط داده می‌شوند. این بخش مراحل زیر را در بر می‌گیرد:

- محاسبهٔ وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی با روش میانگین حسابی فازی؛
- محاسبهٔ وزن نهایی گزینه‌ها؛
- رتبه‌بندی گزینه‌ها؛
- الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی؛
- الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی فازی.

محاسبهٔ وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی با روش میانگین حسابی فازی

محاسبهٔ وزن در AHP در دو قسمت جداگانه مورد بحث قرار می گیرد: وزن نسبی و وزن مطلق (نهایی). وزن نسبی از ماتریس مقایسهٔ زوجی به‌دست می‌آید، درحالی که وزن مطلق، رتبهٔ نهایی هر گزینه است که از تلفیق وزن‌های نسبی محاسبه می‌گردد. یکی از راه‌های محاسبهٔ وزن نسبی در ماتریس‌های ناسازگار، استفاده از روش‌های تقریبی است. از جملهٔ این روش‌ها می‌توان به روش میانگین حسابی اشاره کرد. هدف این بخش، بسط و توسعهٔ این روش برای محاسبهٔ وزن نسبی عناصر فازی ماتریس‌های مقایسات زوجی است. مراحل به‌کارگیری این روش برای استفاده از اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای به‌صورت زیر است:

۱ـ داده‌های ماتریس مقایسهٔ زوجی را به‌صورت اعداد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) به‌دست آورید،

۲ـ داده‌های فازی هر ستون را به‌صورت نرمال درآورید،

۳ـ میانگین سطری داده‌های نرمال شده را محاسبه کنید تا وزن نسبی عناصر به‌صورت

فازی به‌دست آید.

همان‌طور که در فوق اشاره گردید بعد از تشکیل ماتریس مقایسات زوجی به‌صورت اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای، باید داده‌های این ماتریس نرمال شوند. برای نرمال کردن اعداد فازی، از بسط روش قطعی آن استفاده می‌شود. در حالت قطعی، یک عدد نرمال شده از تقسیم آن عدد بر مجموع کل اعداد (n عدد) به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، برای نرمال کردن اعداد قطعی از فرمول زیر استفاده می‌شود:

$$n_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, i = 1,2,...,n$$

که در آن n_i نرمال شدهٔ عدد a_i است. حال اگر این فرمول برای نرمال کردن اعداد فازی تعمیم داده شود، فرم کلی آن به‌صورت زیر تغییر می یابد:

$$\tilde{N}_i = \frac{\tilde{A}_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_i}, i = 1,2,...,n$$

که در آن عدد فازی نرمال شدهٔ $\tilde{N}_i$ از تقسیم عدد فازی $\tilde{A}_i$ بر مجموع کل اعداد فازی حاصل می‌شود. اما با توجه به اینکه عدد $\tilde{N}_i$ یک عدد فازی است، لازم است ابعاد آن مشخص گردد که این امر به نوع عدد فازی $\tilde{A}_i$ بستگی دارد. مثلاً اگر n عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1,2,...,n$ مفروض باشند، آنگاه عدد فازی نرمال شدهٔ $\tilde{N}_i$ از حاصل تقسیم زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{N}_i = \frac{(a_i, b_i, c_i)}{(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, \sum_{i=1}^{n} c_i)}$$

اما مخرج این کسر از جمع n عدد فازی مثلثی حاصل شده و خود نیز یک عدد فازی مثلثی است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ ریاضی تقسیم بین اعداد فازی مثلثی، می‌توان نتیجه گرفت که عدد فازی نرمال شدهٔ $\tilde{N}_i$ برابر است با:

$$\tilde{N}_i = (\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}, \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i})$$

به همین صورت، اگر n عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت $\tilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i), i = 1,2,...,n$ مفروض باشند، آنگاه عدد فازی نرمال شدهٔ $\tilde{N}_i$ ، از تقسیم عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}_i$ بر مجموع کل اعداد فازی ذوزنقه‌ای (که خود یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است) و به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tilde{N}_i = \frac{(a_i, b_i, c_i, d_i)}{(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, \sum_{i=1}^{n} c_i, \sum_{i=1}^{n} d_i)}$$

در اینجا نیز با استفاده از رابطهٔ ریاضی تقسیم بین اعداد فازی ذوزنقه‌ای، می‌توان نتیجه گرفت که عدد فازی نرمال شدهٔ $\tilde{N}_i$ برابر است با:

$$\tilde{N}_i = (\frac{d_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}, \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i}, \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i})$$

باید توجه داشت که اولاً از نرمال کردن چند عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه ای) اعدادی فازی به‌دست می‌آیند، ولی لزوماً این اعداد، عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه ای) نیستند و فقط بیان کنندهٔ تقریبی از یک عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه ای) نرمال شده هستند. و ثانیاً بر خلاف روش نرمال سازی اعداد قطعی، از جمع اعداد فازی نرمال شده، عدد قطعی" یک "به‌دست نمی‌آید، اما می‌توان اظهار داشت که از جمع این اعداد، عدد فازی "تقریباً یک" حاصل می‌شود.

محاسبهٔ وزن نهایی گزینه‌ها

ساختار مثال مورد استفاده در این مقاله، یک ساختار رده‌ای سه سطحی است که اولین سطح از آن شامل هدف تصمیم‌گیری، و سطوح دوم و سوم آن به ترتیب شامل معیارها (شاخص‌ها) و گزینه‌های مفروض از مسئله است. وزن نهایی هر گزینه از حاصل ضرب وزن نسبی معیارها در وزن نسبی گزینه‌ها (نسبت به هر معیار) به‌دست می‌آید.

رتبه‌بندی گزینه‌ها

رتبه‌بندی گزینه‌ها با توجه به اوزان نهایی آنها صورت می‌پذیرد و از آنجا که این

اوزان به‌صورت اعداد فازی می‌باشند، به اعتقاد اصغرپور باید برای رتبه‌بندی آنها و انتخاب بهترین گزینه، از روش‌های رتبه‌بندی فازی استفاده شود. در این مقاله برای رتبه‌بندی اعداد فازی از روش بالدوین[1] استفاده شده است، این روش از جمله روش‌های رتبه‌بندی با به‌کارگیری درجهٔ بهینگی محسوب می‌شود که در آن برای رتبه‌بندی گزینه‌های فازی، از یک رابطهٔ دو بُعدی فازی پیشنهاد شده است. در این روش ابتدا درجهٔ ارجحیت گزینهٔ فازی $\widetilde{A}_i$ در مقایسه با سایر گزینه‌ها به‌دست می‌آید که آن را z_{ij} می نامند. سپس با محاسبهٔ حداقل z_{ij} ها، نمرهٔ ارجحیت گزینهٔ فازی $\widetilde{A}_i$ که به‌صورت $\mu_s(i)$ نشان داده می‌شود، به‌دست می‌آید. در آخر نیز با توجه به این نمرات، گزینه‌های فازی رتبه‌بندی می‌شوند [۲].

درجهٔ ارجحیت عدد فازی مثلثی $\widetilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i)$ بر عدد فازی مثلثی $\widetilde{A}_j = (a_j, b_j, c_j)$، از فرمول زیر محاسبه می‌شود (فرمول اصلی با تغییراتی در نحوهٔ نوشتن به‌صورت زیر تبدیل شده است) :

$$z_{ij} = \frac{c_i - a_j}{1 + (c_i - b_i) + (b_j - a_j)}$$

و با انجام تعدیلاتی بر روی فرمول فوق، درجهٔ ارجحیت عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ بر عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$z_{ij} = \frac{d_i - a_j}{1 + (d_i - c_i) + (b_j - a_j)}$$

الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی

در بخشهای قبل روشی برای محاسبهٔ وزن نسبی گزینه‌های یک ماتریس مقایسهٔ زوجی، با استفاده از روش "میانگین حسابی فازی" ارائه گردید. اما آیا ماتریس مقایسات زوجی به‌دست آمده از فرد خبره، دارای سازگاری قابل قبولی است؟ حالت کاملاً سازگار در ماتریس فازی با توجه به ماهیت داده‌های این ماتریس از مفهوم چندانی برخوردار نیست. با این وجود در این ماتریس‌ها نیز می‌توان یک حالت " تقریباً سازگار" را جستجو کرد تا از بروز قضاوت‌های سهل انگارانه ممانعت گردد. مثلاً

1- Baldwin & Guild -method

فرض کنید گزینهٔ C_1 به گزینهٔ C_2 و همچنین گزینهٔ C_2 به گزینهٔ C_3 "تقریباً ۲ برابر" ارجح باشند. حال اگر گزینهٔ C_1 به گزینهٔ C_3 "تقریباً ۹ برابر" ارجحیت داده شود، این ماتریس را می‌توان ناسازگار و در صورتیکه این ترجیح "تقریباً ۴ برابر" باشد، می‌توان ماتریس را " تقریباً سازگار" و قضاوتهای فرد خبره را معتبر دانست. در ادامه الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس مقایسهٔ زوجی [۲،ص۷۴] برای استفاده از اعداد فازی بسط داده می‌شود. مراحل این الگوریتم به‌صورت زیر است:

داده‌های ماتریس فازی مقایسات زوجی $\tilde{A}$ را به فرم اعداد مثلثی (یا ذوزنقه‌ای) تشکیل دهید،

وزن نسبی گزینه‌های این ماتریس را به‌دست آورید (مثلاً از روش میانگین حسابی فازی) و آن را بردار وزن فازی $\tilde{W}_i$ بنامید،

اندازهٔ تقریبی بزرگترین مقدار ویژهٔ فازی ماتریس $\tilde{A}$ ($\tilde{\lambda}_{\max}$) را به‌صورت زیر تخمین بزنید:

با ضرب بردار $\tilde{W}_i$ در ماتریس $\tilde{A}$ تخمین مناسبی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)}\tilde{W}_i$ به‌دست آورید،

از تقسیم $\tilde{\lambda}_{\max(i)}\tilde{W}_i$ بر $\tilde{W}_i$ مربوطه، تخمینهایی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ را محاسبه نمایید،

متوسط $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ های به‌دست آمده را پیدا کرده و آن را $\tilde{\lambda}_{\max}$ بنامید.

مقدار شاخص ناسازگاری فازی[1] ($I.\tilde{I}.$) را از رابطهٔ زیر محاسبه نمایید: (n بُعد ماتریس است)

$$I.\tilde{I}. = \frac{\tilde{\lambda}_{\max} - n}{n-1}$$

میزان ناسازگاری فازی[2] ماتریس $\tilde{A}$ ($I.\tilde{R}.$) را از فرمول زیر به‌دست آورید:

$$I.\tilde{R}. = \frac{I.\tilde{I}.}{I.I.R.}$$

که در این فرمول I.I.R. شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی[3] است. این شاخص برای ماتریس‌هایی که اعداد آنها کاملاً تصادفی اختیار شده باشند محاسبه شده که مقادیر آن برای ماتریس‌های n بُعدی مطابق جدول ۱ است.

1- Fuzzy Inconsistency Index
2- Fuzzy Inconsistency Ratio
3- Inconsistency Index of Random Matrix

جدول۱. مقدار شاخص‌های ناسازگاری تصادفی برای ماتریس‌هایی با ابعاد مختلف

n	۱	۲	۳	٤	٥	٦	۷	۸	۹	۱۰
I.I.R.	۰	۰	۰,۵۸	۰,۹	۱,۱۲	۱,۲٤	۱,۳۲	۱,٤۱	۱,٤٥	۱,٤٥

به عبارت دیگر در هر ماتریس، حاصل تقسیم شاخص ناسازگاری بر شاخص ماتریس تصادفیِ هم بُعدش، معیار مناسبی برای قضاوت در مورد ناسازگاری ماتریس است که آن را میزان ناسازگاری می نامند. چنانچه این عدد کوچکتر یا مساوی ۰,۱ باشد ماتریس از سازگاری تقریبی برخوردار است، در غیر این صورت باید در قضاوتها تجدید نظر شود. البته باید توجه داشت که شاخص ناسازگاری ماتریس تصادفی برای ماتریس‌های قطعی n بُعدی به‌دست آمده که در این الگوریتم برای محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس‌های فازی تعمیم داده شده است.

الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی فازی

در این بخش، الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری سلسله مراتبی با تعریف قدسی پور، برای استفاده از اعداد فازی و به‌صورت زیر بسط داده می‌شود[۲]:

ـ شاخص ناسازگاری فازی هر جدول یعنی $\tilde{I.I.}(i)$ را در وزن عنصر مربوطه اش (یعنی عنصری که جدول در مقایسه با آن ساخته شده است) ضرب نموده و حاصل جمع آنها را به‌دست آورید. این حاصل جمع را $\overline{I.I.}$ بنامید،

ـ شاخص ناسازگاری تصادفی هر جدول یعنی $I.I.R.(i)$ را در وزن عنصر مربوطه اش ضرب کرده و مجموعشان را $\overline{I.I.R.}$بنامید،

ـ میزان ناسازگاری سلسله مراتب فازی یعنی $\tilde{I.R.}(H)$ را از حاصل تقسیم $\dfrac{\overline{I.I.}}{\overline{I.I.R.}}$ به‌دست آورید.

تشریح یک مثال برای تبیین رویکردهای ارائه شده

در این قسمت به منظور تبیین رویکردهای ارائه شده از یک مثال به نقل از اصغرپور استفاده شده است[۲]. در این مثال درجهٔ زیان بخشی سه نوع حکومتِ جمهوری، سلطنتی و مذهبی (A_1,A_2,A_3) در مقابل سه شاخص (صداقت، پارتی بازی و فساد) با

استفاده از اصول ردهای AHP توسط یک متخصص به‌صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای و به‌صورت جداول مقایسات زوجی ۲، ۳، ۴ و ۵ امتیاز دهی شده است.

جدول۲. ماتریس مقایسات زوجی معیارها نسبت به هم از نظر تصمیم‌گیرنده

معیارها	صداقت (C_1)	پارتی بازی (C_2)	فساد (C_3)
صداقت (C_1)	(۱و۱و۱و۱)	(۲,۰و۱/٦و۱/٦و۱/۷)	(۱و۱/۲و۱/۲و۱/۳)
پارتی بازی (C_2)	(۷و٦و٦و۵)	(۱و۱و۱و۱)	(۳و۳و۳و۳)
فساد (C_3)	(۳و۲و۲و۱)	(۱/۳و۱/۳و۱/۳و۱/۳)	(۱و۱و۱و۱)

جدول۳. ماتریس مقایسات زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار صداقت از نظر تصمیم‌گیرنده

صداقت (C_1)	گزینهٔ A_1	گزینهٔ A_2	گزینهٔ A_3
گزینهٔ A_1	(۱و۱و۱و۱)	(۱/۲و۱/۳و۱/۳و۱/٤)	(۱/۲و۱/۲و۱/۲و۱/۲)
گزینهٔ A_2	(٤و۳و۳و۲)	(۱و۱و۱و۱)	(۲و۲و۱و۱)
گزینهٔ A_3	(۲و۲و۲و۲)	(۱و۱و۱/۲و۱/۲)	(۱و۱و۱و۱)

جدول٤. ماتریس مقایسات زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار پارتی بازی از نظر تصمیم‌گیرنده

پارتی بازی (C_2)	گزینهٔ A_1	گزینهٔ A_2	گزینهٔ A_3
گزینهٔ A_1	(۱و۱و۱و۱)	(۷و٦و٦و٦)	(٤و٤و۲و۲)
گزینهٔ A_2	(۱/٦و۱/٦و۱/٦و۱/۷)	(۱و۱و۱و۱)	(۱و۱و۱/۲و۱/۲)
گزینهٔ A_3	(۱/۲و۱/۲و۱/٤و۱/٤)	(۲و۲و۱و۱)	(۱و۱و۱و۱)

جدول۵. ماتریس مقایسات زوجی گزینه‌ها نسبت به معیار فساد از نظر تصمیم‌گیرنده

فساد (C_3)	گزینهٔ A_1	گزینهٔ A_2	گزینهٔ A_3
گزینهٔ A_1	(۱و۱و۱و۱)	(۳و۲و۲و۱)	(۸و۸و۸و۷)
گزینهٔ A_2	(۱و۱/۲و۱/۲و۱/۳)	(۱و۱و۱و۱)	(٤و٤و۳و۳)
گزینهٔ A_3	(۱/۷و۱/۸و۱/۸و۱/۸)	(۱/۳و۱/۳و۱/٤و۱/٤)	(۱و۱و۱و۱)

ملاحظه می‌شود که خاصیت عکس پذیری در تمام ماتریس‌ها حفظ شده است. همچنین برای انجام محاسبات، تمام داده‌های این ماتریس‌ها (حتی اعداد قطعی) به فرم اعداد فازی ذوزنقه‌ای نوشته شده‌اند. هدف انتخاب بهترین شیوهٔ حکومت و تعیین میزان

سازگاری جداول مقایسات زوجی و ساختار سلسله مراتبی داده شده است. برای این منظور مراحل زیر صورت پذیرفته است:

محاسبهٔ وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی با روش میانگین حسابی فازی

هدف این قسمت محاسبهٔ وزن نسبی عناصر هر یک از جداول مقایسات زوجی است. برای این منظور از روش میانگین حسابی فازی استفاده شده است. برای مثال به جدول۲ توجه شود. برای محاسبهٔ وزن نسبی عناصر این جدول، ابتدا جمع ستونی آن محاسبه می‌شود. از آنجا که داده‌های این ماتریس به‌صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای هستند، بنابراین از جمع ستونی آنها نیز اعداد فازی ذوزنقه‌ای به‌دست می‌آید. حال با استفاده از روابط بیان شده، داده‌های این جدول نرمال می‌شوند که نتایج آن در جدول ۶ داده شده است.

جدول ٦. ماتریس نرمال شدهٔ حاصل از جدول ۲

معیارها	ستون نرمال شدهٔ اول	ستون نرمال شدهٔ دوم	ستون نرمال شدهٔ سوم
صداقت (C_1)	(۱٤۳,۰و۱۱,۰و۱۱,۰و۰۹۱,۰)	(۱۳۵,۰و۱۱,۰و۱۱,۰و۰۹۳,۰)	(۲۳۱,۰و۱۱,۰و۱۱,۰و۰٦۷,۰)
پارتی بازی (C_2)	(۱و٦٦۷,۰و٦٦۷,۰و٤٥٤,۰)	(٦۸,۰و٦٦۷,۰و٦٦۷,۰و٦٥۲,۰)	(٦۹۲,۰و٦٦۷,۰و٦٦۷,۰و٦,۰)
فساد (C_3)	(٤۲۸,۰و۲۲۲,۰و۲۲۲,۰و۰۹۱,۰)	(۲۲٦,۰و۲۲۲,۰و۲۲,۰و۲۱۷,۰)	(۲۳۱,۰و۲۲۲,۰و۲۲۲,۰و۲,۰)
جمع	(۱,٥۷۱او ۱ و ۱ و٦۳٦,۰)	(۱,۰۳۹او ۱ و ۱ و۹٦۳,۰)	(۱,٥۳٤او ۱ و ۱ و۸٦۷,۰)

با توجه به داده‌های این جدول می‌توان اظهار داشت که از جمع اعداد فازی نرمال شده در هر ستون، عدد فازی "تقریباً یک" به‌دست آمده است. حال با میانگین گیری سطری از اعداد نرمال شدهٔ جدول فوق، وزن نسبی معیارها به‌دست می آید که نتایج آن در جدول ۷ آمده است.

جدول۷. وزن نسبی معیارها (عناصر جدول ۲)

وزن نسبی معیار صداقت (C_1)	وزن نسبی معیار پارتی بازی (C_2)	وزن نسبی معیار فساد (C_3)
(۱۷,۰و۱۱۱,۰و۱۱۱,۰و۰۸٤,۰)	(۷۹,۰و٦٦۷,۰و٦٦۷,۰و٥٦۹,۰)	(۲۹٥,۰و۲۲۲,۰و۲۲۲,۰و۱۷,۰)

با استفاده از روش بیان شده، می‌توان وزن نسبی عناصر سایر جداول مقایسات زوجی را نیز محاسبه کرد که نتایج آن به‌طور خلاصه در جدول ۸ آمده است.

جدول۸. وزن نسبی عناصر جداول ۲، ۳ و ٤

گزینه‌ها	وزن نسبی گزینه‌ها در رابطه با معیار C_1 (جدول۲)	وزن نسبی گزینه‌ها در رابطه با معیار C_2 (جدول۳)	وزن نسبی گزینه‌ها در رابطه با معیار C_3 (جدول٤)
گزینهٔ A_1	(۰,۲۲۹و۰,۱۸۳و۰,۱۵۱و۰,۱۲۹)	(۰,۹۱۲و۰,۸۶۶و۰,۵۳۳و۰,۵۱۱)	(۰,۹۱۵و۰,۶۳۲و۰,۶۱و۰,٤۱۲)
گزینهٔ A_2	(۰,۷۲٤و۰,۶۱۵و۰,٤۰۵و۰,۳۲٤)	(۰,۱۷۷و۰,۱۷۶و۰,۰۹۸و۰,۰۹)	(۰,۵و۰,۳۱۶و۰,۲۸و۰,۲۰۶)
گزینهٔ A_3	(۰,٤۵۷و۰,٤۲۶و۰,۲۷۷و۰,۲۵۷)	(۰,۳و۰,۲۹۶و۰,۱٤۳و۰,۱۳۹)	(۰,۱۱۲و۰,۰۸۸و۰,۰۷۶و۰,۰۶۳)

محاسبهٔ وزن نهایی گزینه‌ها

همان‌طور که قبلاً نیز بیان گردید، وزن نهایی هر گزینه از حاصل ضرب وزن نسبی معیارها (جدول ۷) در وزن نسبی گزینه‌ها نسبت به هر معیار (جدول ۸) به‌دست می‌آید. وزن نهایی محاسبه شده برای گزینه ها در جدول ۹ نشان داده شده است.

جدول۹. وزن نهایی گزینه ها

وزن نهایی گزینهٔ A_1	وزن نهایی گزینهٔ A_2	وزن نهایی گزینهٔ A_3
(۱,۰۳و۰,۷۳۸و۰,۵۰۸و۰,۳۷۱)	(۰,٤۰۹و۰,۲۵۶و۰,۱۷۲و۰,۱۱۳)	(۰,۳٤۶و۰,۲۶٤و۰,۱٤۳و۰,۱۱۱)

به دلیل آنکه اوزان نسبی محاسبه شده در بخش قبل به‌صورت فازی هستند، وزن نهایی گزینه‌ها نیز که از حاصل ضرب اوزان نسبی به‌دست آمده، به‌صورت فازی می باشند.

رتبه‌بندی گزینه‌ها

رتبه‌بندی گزینه‌ها با توجه به اوزان نهایی آنها صورت می پذیرد و به دلیل آنکه این اوزان به‌صورت اعداد فازی هستند، برای رتبه‌بندی آنها و انتخاب بهترین گزینه از روش بالدوین استفاده شده است. درجهٔ ارجحیت گزینه ها با استفاده از روش بالدوین در جدول ۱۰ آمده است.

جدول۱۰. درجه ارجحیت گزینه ها با روش بالدوین

گزینه‌ها	گزینهٔ A_1	گزینهٔ A_2	گزینهٔ A_3
نمرهٔ ارجحیت گزینه‌ها	۰,۶۷۸	۰,۰۲۹	−۰,۰۲
رتبهٔ گزینه‌ها	۱	۲	۳

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد ترجیحات گزینه‌ها به‌صورت رابطه A۱ > A۲ > A۳ است. یعنی با توجه به مقایسات زوجی صورت گرفته توسط این متخصص، حکومت جمهوری نسبت به دو حکومت سلطنتی و مذهبی در مقایسه با معیارهای صداقت، پارتی بازی و فساد، زیان بخش ترین نوع حکومت شناخته شده است.

محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی

در این بخش به محاسبه میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی با استفاده از الگوریتم ارائه شده در این مقاله پرداخته می‌شود. برای نمونه می‌خواهیم میزان ناسازگاری جدول ۲ را محاسبه کنیم. مراحل الگوریتم ارائه شده برای این جدول به‌صورت زیر است:

۱ـ تمام داده‌های این جدول به فرم اعداد فازی نشان داده شود (نتیجه این مرحله در جدول۲ آمده است)

۲ـ وزن نسبی گزینه‌های این ماتریس($\tilde{W}_i$) را از روش میانگین حسابی فازی به‌دست آمده است (نتیجه این مرحله در جدول۷ داده شده است)

۳ـ از حاصل‌ضرب بردار $\tilde{W}_i$ در داده‌های جدول ۲ تخمین مناسبی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)}\tilde{W}_i$ به‌دست آمده و سپس از تقسیم $\tilde{\lambda}_{\max(i)}\tilde{W}_i$ بر $\tilde{W}_i$ مربوطه، تخمینهایی از $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$\tilde{\lambda}_{\max(1)}$ = (۲,۶۵ و۳ و۳ و۳,۶۷)

$\tilde{\lambda}_{\max(2)}$ = (۲,۶۳ و ۳ و۳ و۳,۶۲)

$\tilde{\lambda}_{\max(3)}$ = (۲,۶۱ و ۳ و۳ و۳,۶۲)

در نهایت با میانگین گیری از مقادیر $\tilde{\lambda}_{\max(i)}$ها، مقدار $\tilde{\lambda}_{\max}$ به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

$\tilde{\lambda}_{\max}$ = (۲,۶۳ و ۳ و۳ و۳,۶۴)

۴ـ مقدار شاخص ناسازگاری فازی این جدول به‌صورت زیر محاسبه شده است (n بُعد ماتریس و برابر با ۳ است):

$$\tilde{I.I.} = \frac{\tilde{\lambda}_{\max} - n}{n-1} =$$ (−۰,۱۸ و ۰ و ۰ و ۰,۳۲)

۵ـ در گام آخر نیز میزان ناسازگاری جدول ۲ به‌صورت زیر به‌دست آمده است (با

توجه به اینکه این جدول یک ماتریس ۳ بُعدی است، بنابراین مقدار I.I.R. متناسب با این جدول برابر است با ۰,۵۸) :

$$I.\tilde{R}. = \frac{I.\tilde{I}.}{I.I.R.} = (-۰,۳۲ \text{ و } ۰ \text{ و } ۰ \text{ و } ۰,۵۵)$$

به همین صورت می‌توان میزان ناسازگاری سایر جداول مقایسات زوجی را نیز محاسبه کرد که نتایج حاصل از آن در جدول ۱۱ نشان داده شده است.

جدول۱۱. میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی مثال داده شده

میزان ناسازگاری جدول۱	(۰,۵۵و۰ و۰ و۰,۳۲-)
میزان ناسازگاری جدول۲	(۰,٤۹و۰,۲۵ و۰,۱٦- و۰,۳۳-)
میزان ناسازگاری جدول۳	(۰,۵۵و۰,۵ و۰,۳۲- و۰,۳٦-)
میزان ناسازگاری جدول٤	(۰,۵۷و۰,۰۹ و۰,۰۷- و۰,۳۵-)

مقدارهای ناسازگاری فوق دارای شکل شناخته شده‌ای از اعداد فازی نیستند، اما با توجه به اینکه این مقادیر از انجام محاسبات بر روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای به‌دست آمده‌اند، می‌توان آنها را تقریب مناسبی از یک عدد فازی ذوزنقه‌ای دانست.

پس از به‌دست آوردن میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی، باید آنها را با عدد ۰,۱ مقایسه کرد تا به سازگار یا ناسازگار بودن این جداول پی برد. در اینجا نیز برای مقایسهٔ میزان ناسازگاری هر جدول با عدد ۰,۱ از روش بالدوین استفاده شده است. اما به دلیل اینکه از روش بالدوین برای مقایسهٔ اعداد فازی استفاده می‌شود، و می‌توان مقدارهای ناسازگاری فازی به‌دست آمده را تقریبی از اعداد فازی ذوزنقه‌ای دانست، می‌توان عدد ۰,۱ را به‌صورت (۰,۱و۰,۱و۰,۱و۰,۱) نوشته و سپس به مقایسهٔ میزان ناسازگاری جداول مقایسات زوجی با این عدد پرداخت. با این توضیحات می‌توان به‌صورت تقریبی تعیین کرد که یک جدول مقایسات زوجی فازی، سازگار یا ناسازگار است. برای نمونه سازگار یا ناسازگار بودن جداول مقایسات زوجی مثال داده شده، بررسی و نتایج آن در جدول ۱۲ آمده است. در این جدول $z_{i,(0.1)}$ بیانگر درجهٔ ارجحیت میزان ناسازگاری جدولiاُم در مقایسه با عدد ۰,۱ و $z_{(0.1),i}$ نیز بیانگر درجهٔ ارجحیت عدد ۰,۱ در مقایسه با میزان ناسازگاری جدولiاُم است. همچنین $I.\tilde{R}.(i)$ نیز

بیان‌گر میزان ناسازگاری فازی جدول iاُم است. برای هر جدول مقایسات زوجی، اگر مقدار $z_{i,(0.1)}$ از مقدار $z_{(0.1),i}$ کمتر باشد، در این صورت میزان ناسازگاری این جدول کمتر از ۰٫۱ بوده و دارای سازگاری تقریبی است. در غیر این صورت جدول مذکور از سازگاری تقریبی برخوردار نیست.

جدول۱۲. تعیین سازگار یا ناسازگار بودن جداول مقایسات زوجی مثال ارائه شده

جداول مقایسات زوجی	$z_{i,(0.1)}$	$z_{(0.1),i}$	نتیجه
جدول۱	۰٫۲۹	۰٫۳۲	$I.\tilde{R}.(1) <$ ۰٫۱
جدول۲	۰٫۳۱	۰٫۳۷	$I.\tilde{R}.(2) <$ ۰٫۱
جدول۳	۰٫۴۳	۰٫۴۴	$I.\tilde{R}.(3) <$ ۰٫۱
جدول۴	۰٫۳۲	۰٫۳۵	$I.\tilde{R}.(4) <$ ۰٫۱

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد تمام جداول مقایسات زوجی داده شده در مثال، از سازگاری تقریبی برخوردار هستند. از مقایسهٔ میزان ناسازگاری این جداول با استفاده از روش بالدوین، می‌توان به رتبه‌بندی آنها و یافتن سازگارترین جدول پرداخت. بدین صورت که هرچه نمرهٔ ارجحیت یک جدول در مقایسه با سایر جداول کمتر باشد، این جدول از سازگاری تقریبی بیشتری برخوردار است. نتایج حاصل از انجام این مراحل در جدول ۱۳ آمده است.

جدول۱۳. رتبه‌بندی جداول مقایسات زوجی مثال از لحاظ سازگاری با استفاده از روش بالدوین

	$z_{i,1}$	$z_{i,2}$	$z_{i,3}$	$z_{i,4}$	$\mu_s(i)$	رتبه
جدول۱	----	۰٫۵۱۲	۰٫۵۷۱	۰٫۴۹۱	۰٫۴۹۱	۱
جدول۲	۰٫۵۱۷	----	۰٫۶۶۱	۰٫۵۵۱	۰٫۵۱۷	۳
جدول۳	۰٫۶۳۶	۰٫۷۲۴	----	۰٫۶۷۸	۰٫۶۳۶	۴
جدول۴	۰٫۴۹۶	۰٫۵۴۸	۰٫۶۱۳	----	۰٫۴۹۶	۲

در جدول فوق $\mu_s(i)$ عبارت است از نمرهٔ ارجحیت جدول iاُم و برابر است با حداقل درجات ارجحیت جدول iاُم بر سایر جداول. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد در بین

جداول فوق، جدول ۱ از سازگاری تقریبی بیشتر و جدول ۴ از سازگاری تقریبی کمتری برخوردار هستند.

الگوریتم محاسبهٔ میزان ناسازگاری یک سلسله مراتبی فازی

در این بخش میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی برای مثال داده شده، با استفاده از الگوریتم ارائه شده در بخش ۳-۵ محاسبه گردیده است. اگر مراحل این الگوریتم برای سلسله مراتب مثال مذکور به‌کار برده شود، آن گاه مقادیر $\overline{I.I.}$ و $\overline{I.I.R.}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$\overline{I.I.}=$ (۰٫۷۱۸ و ۰٫۲۲۱ و ۰٫۱۴۳- و ۰٫۳۵۴-)

$\overline{I.I.R.}=$ (۱٫۳۰۸ و ۱٫۱۶ و ۱٫۱۶ و ۱٫۰۵۷)

حال از تقسیم $\overline{I.I.}$ بر $\overline{I.I.R.}$ میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی به‌دست می‌آید. اما با توجه به منفی بودن دو بُعد عدد فازی $\overline{I.I.}$ ، باید از کل حالات تقسیم ابعاد $\overline{I.I.}$ بر ابعاد $\overline{I.I.R.}$، کمترین و بیشترین عدد را به عنوان پای چپ و پای راست $I.\tilde{R}.(H)$ در نظرگرفت. همچنین از تقسیم دو بُعد میانی $\overline{I.I.}$ بر دو بُعد میانی $\overline{I.I.R.}$ (۴ حالت) و به‌دست آوردن کمترین و بیشترین عدد ممکنه، دو بُعد میانی $I.\tilde{R}.(H)$ به‌دست می‌آید. با توجه به مطالب گفته شده میزان ناسازگاری سلسله مراتبی مفروض به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$I.\tilde{R}.(H)=$ (۰٫۶۸ و ۰٫۱۹۱ و ۰٫۱۲۳- و ۰٫۳۳۵-)

در اینجا نیز برای بررسی سازگار یا ناسازگار بودن این سلسله مراتبی فازی از روش بالدوین استفاده می‌شود. برای این منظور میزان ناسازگاری این سلسله مراتبی با عدد (۰٫۱ و ۰٫۱ و ۰٫۱ و ۰٫۱) مقایسه شده که درجهٔ ارجحیت میزان ناسازگاری سلسله مراتبی و همچنین درجهٔ ارجحیت عدد ۰٫۱ به ترتیب برابر شده‌اند با: $z_{H,(0.1)}=$ ۰٫۳۹ و ۰٫۳۶ = $z_{(0.1),H}$. به دلیل آنکه درجهٔ ارجحیت میزان ناسازگاری سلسله مراتبی از درجهٔ ارجحیت عدد ۰٫۱ بزرگتر شده است، می‌توان چنین نتیجه گرفت که ساختار سلسله مراتبی مثال مذکور، از سازگاری قابل قبولی برخوردار نیست. برای سازگار کردن این سلسله مراتبی، می‌توان از فرد خبره خواست تا در قضاوت‌های خود در خصوص جداولی که از سازگاری کمتری برخوردار هستند (بویژه جدول ۴)، تجدید نظر کند.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

برای استفاده از اعداد فازی در روش فرایند تحلیل سلسله مراتبی، روش‌های مختلفی ارائه گردیده است. در این مقاله نیز از بسط فازی روش تقریبی "میانگین حسابی"، وزن نسبی عناصر جداول مقایسات زوجی و سپس وزن نهایی گزینه‌ها به‌صورت اعداد فازی به‌دست آمده و درنهایت از تکنیکهای رتبه‌بندی فازی برای تعیین ترجیحات گزینه‌ها استفاده شد. همچنین روشی نیز برای محاسبهٔ میزان ناسازگاری ماتریس مقایسهٔ زوجی فازی و میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی از بسط الگوریتم‌های موجود ارائه گردید. برای روشن شدن این روش‌ها از یک مثال نیز استفاده شد و ملاحظه گردید که هر چند تمام جداول مقایسات زوجی این مثال از سازگاری تقریبی برخوردار بودند، اما خودِ سلسله مراتبی فازی، دارای سازگاری قابل قبولی نبود.

به عنوان تحقیقات آتی پیشنهاد می‌گردد که روش‌های دیگر تقریبی نیز که عبارتند از روش مجموع سطری، روش مجموع ستونی و روش میانگین هندسی، به منظور استفاده از اعداد فازی بسط داده شوند. سپس میزان ناسازگاری ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی و میزان ناسازگاری سلسله مراتبی فازی در هر یک از این روش‌ها محاسبه، و نتایج به‌دست آمده از آنها با یکدیگر مقایسه گردد.

منابع

۱. آذر، عادل و حجت فرجی،**"علم مدیریت فازی"**، مرکز مطالعات مدیریت و بهره وری ایران، ۱۳۸۱.

۲. اصغرپور، محمد جواد،**"تصمیم‌گیری های چند معیاره"**، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۷.

۳. قدسی پور، حسن، **" فرایند تحلیل سلسله مراتبی"**، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، ۱۳۷۹.

٤. وانگ، لی،**"سیستم های فازی و کنترل فازی"**، ترجمهٔ محمد تشنه لب و دیگران، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۸.

5. Buckley, J.J., "**Fuzzy hierarchical analysis**", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 17, 1985, pp. 233-247.
6. Cebeci, U., "**Customer satisfaction of catering service companies in turkey**", Proceedings of the 6th International Conference on ISO 9000 and TQM (6th ICIT), Glasgow, April 2001, pp. 519-524.
7. Cebeci, U. and C. Kahraman, "**Measuring customer satisfaction of catering service companies using fuzzy AHP: the case of turkey**", Proceedings of International Conference on Fuzzy Systems and Soft Computational Intelligence in Management and Industrial Engineering, Istanbul, May 2002, pp. 315-325.
8. Chan, F.T.S., Chan, M.H. and N.K.H. Tang, "**Evaluation methodologies for technology selection**", Journal Materials Processing Technology, Vol. 107, 2000, pp. 330-337.
9. Chan, F.T.S., Jiang, B. and N.K.H. Tang, "**The development of intelligent decision support tools to aid the design of flexible manufacturing systems**", International Journal of Production Economics, Vol. 65, No. 1, 2000, pp. 73-84.
10. Chang, D. Y., "**Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP**", European Journal of Operational Research, Vol. 95, 1996, pp. 649-655
11. Chang, C.W., Wu, C.R. and H.L. Lin, "**Applying fuzzy hierarchy multiple attributes to construct an expert decision making process**", Expert Systems with Applications, Volume 36, Issue 4, 2009, Pages 7363-7368.
12. Cheng, C.H., Yang, K.L. and C.L. Hwang, "**Evaluating attack helicopters by AHP based on linguistic variable weight**", European Journal of Operational Research, Vol. 116, No. 2, 1999, pp. 423-443.
13. Ching-Hsue, C., "**Evaluating naval tactical missile systems by fuzzy AHP based on the grade value of membership function**", European Journal of Operational Research, Vol. 96, No. 2, 1997, pp. 343-350.
14. Dağdeviren, M. and İ. Yüksel, "**Developing a fuzzy analytic hierarchy process (AHP) model for behavior-based safety management**", Information Sciences, Volume 178, Issue 6, 2008, Pages 1717-1733.

15. Deng, H., "**Multicriteria analysis with fuzzy pairwise comparison**", International Journal of Approximate Reasoning, Vol. 21, No. 3, 1999, pp. 215-231.
16. Kahraman, Ulukan, Z., and E. Tolga, "**A fuzzy weighted evaluation method using objective and subjective measures**", Proceedings of International ICSC symposium on Engeneering of Intelligent systems (EIS,98), Vol. 1, University of La Laguna, Tenerife, 1998, pp. 57-63.
17. Kahraman, C., Cebeci, U. and D. Ruan, "**Multi-attribute comparision of catering service companies using fuzzy AHP: the case of turkey**", Production Economics, 2004, No.87, pp. 171-184.
18. Kuo, R.J., Chi, S.C. and S.S. Kao, "**A decision support system for selecting convenience store location through integration of fuzzy AHP and artificial neural network**", Computers in Industry, 2002, No. 47, pp. 199-214.
19. Laarhoven, V. and W. Pedrycz, "**A fuzzy extension of Saaty,s priority theory**", Fuzzy Sets and Systems, vol. 11,1983, pp. 229-241.
20. Lee, M., Pham, H. AND X. Zhang, "**A methodology for priority setting with application to software development process**", European Journal of Operational Research, Vol. 118, 1999, pp. 375-389.
21. Leung, L.C. and D. Cao, "**On consistency and ranking of alternatives in fuzzy AHP**", European Journal of Operational Research, Vol. 124, 2000, pp. 102-113.
22. Liu, F., "**Acceptable consistency analysis of interval reciprocal comparison matrices**", Fuzzy Sets and Systems, Volume 160, Issue 18, 2009, Pages 2686-2700.
23. Mamat N.J.Z. and J.K. Daniel, "**Statistical analyses on time complexity and rank consistency between singular value decomposition and the duality approach in AHP: A case study of faculty member selection**", Mathematical and Computer Modelling, Volume 46, Issues 7-8, 2007, Pages 1099-1106.
24. Stam, A., Minghe, S. and M. Haines, "**Artificial neural network representations for hierarchical preference structures**", Computers & Operations Research, Vol. 23, No. 12, 1996, pp. 1191-1201.
25. Wang, Y.M., Elhag, T.M.S. and Z. Hua, "**A modified fuzzy logarithmic least squares method for fuzzy analytic hierarchy process**", Fuzzy Sets and Systems, Volume 157, Issue 23, 2006, Pages 3055-3071.
26. Weck, M., Klocke, F., Schell, H. and E. Roenauver, "**Evaluating alternative production cycles using the extended fuzzy AHP method**", European Journal of Operational Research, Vol. 100, No. 2, 1997, pp. 351-366
27. Zhu, K.J., Jing, Y. and D.Y. Chang, "**A discussion on extent analysis method and applications of fuzzy AHP**", European Journal of Operational Research, Vol. 116, 1999, pp. 450-456