روشی برای بهینه‌سازی مسائل چندپاسخهٔ آماری با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی فازی

دکتر مقصود امیری*

چکیده

در این مقاله روشی برای بهینه‌سازی مسائل چندپاسخهٔ آماری با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی فازی ارائه می‌شود. از آنجا که روش برنامه‌ریزی آرمانی نظرات تصمیم‌گیرنده (DM) را بصورت عینی در نظر می‌گیرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. روش ارائه شده در مقایسه با روشهای موجود سرعت بیشتری داشته و هم‌چنین از زیربنای ریاضی قویتری برخوردار است. مقایسه بین روش پیشنهادی و روشهای موجود نشان می‌دهد که روش پیشنهادی دارای کارایی بالا می‌باشد. این امر، با یک مثال نشان داده شده است.

* - عضو هیئت‌علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه‌طباطبایی

کلید واژه‌ها: روش سطح پاسخ (RSM)، تصمیم‌گیرنده (DM)، برنامه‌ریزی آرمانی فازی، مسائل چندپاسخه

۱- مقدمه

یک مسئله رایج در صنایع تولیدی عبارت است از انتخاب یک مجموعه از شرایط ورودی یا مجموعه‌ای از مقادیر X_j بطوریکه کیفیت تولید موردنظر (Y_i) دارای شرایط مطلوب باشد. این مسئله منجر به بهینه‌سازی همزمان متغیرهای پاسخ Y_i می‌شود که هر یک بستگی به یک مجموعه از متغیرهای ورودی X_1 و X_2 و ... X_n دارد. در این گونه از مسائل هدف عبارتست از اینکه مقادیر X_jها در سطوحی انتخاب شوند که مجموعه Y_jها بهینه گردند.

بکارگیری اطلاعات آماری در جهت بهینه‌سازی به اوایل قرن ۱۹ باز می‌گردد[1]. روشهای آماری متعددی برای بهبود فرآیندهای تولید مطرح گردیده است که یکی از مهمترین این روشها طرح‌ریزی آزمایش‌ها است. طرح‌ریزی آزمایش‌ها ابزاری مناسب جهت بررسی روابط علمی بین متغیرهای قابل کنترل و مشخصه‌های کیفی کالای موردنظر است. ارتباط بین مشخصه‌های کیفی و متغیرهای قابل کنترل از روش سطح پاسخ (RSM) بدست می‌آید. از نظر Box و Hunter ، RSM مجموعه‌ای از تکنیک‌های طرح‌ریزی آزمایشات و بهینه‌سازی است که توسط آماردانان و صاحب‌نظران علوم مختلف جهت بهینه‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرند [2].

در RSM با بکارگیری طرحهای آزمایشی مناسب اطلاعات ساخت‌یافته‌ای بدست می‌آید که با برازش مدل مناسب بر داده‌های بدست آمده منحنیهای سطح پاسخ بدست می‌آید که در جهت بهبود فرآیند تولید از آن استفاده می‌شود. RSM دارای این مزیت است که بخشی از محاسبات آن را می‌توان بصورت موازی انجام داد. همچنین می‌توان میزان حساسیت پارامترهای تخمینی را بدست آورد [3].

از آنجا که کالاها معمولاً بیش از یک مشخصه کیفی دارند بهبود همزمان این مشخصه‌های کیفی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مشکل معمول در بهینه‌سازی همزمان چندپاسخه آن‌است که هنگام بهینه نمودن یک مشخصه سایر مشخصه‌های

کیفی تحت تأثیر قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مجموعه‌ای از شرایط که برای یک خصوصیت بهینه است لزوماً برای سایر مشخصه‌ها بهینه نیست. به همین دلیل طراحی روشی که بتواند با درنظر گرفتن جنبه‌های مختلف، حصول قابل قبولی را ارائه نماید از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [5]. بهینه‌سازی چندپاسخه در چارچوب RSM تلاشی در این راستاست.

برای بهینه‌یابی چندپاسخه روشهای کلاسیک شبیه روش اهداف حددار و در مواردی ترکیبی از روش اهداف حددار و روش لکسیکوگراف است. Myers و Carter برای اولین بار از این روش استفاده نمودند [8]. آنها بهینه کردن جواب اصلی همراه با محدود کردن جوابهای دیگر را برای اولین بار پیشنهاد نمودند. Biles این روش را به بیش از دو جواب گسترش داد [9]. Khuri, Myers و Vining با ترکیب کردن روش Carter و Myers با روش تاگوچی این روش را گسترش دادند [10]. آنها اثرات پراکندگی و پاسخ را به عنوان دو جواب جداگانه در بهینه‌یابی مورد استفاده قرار دادند.

روش تابع زیان توسط افرادی مانند Lo و Tang [11] و Pignatello [12] و Winstion [13] و Artiles-Leon [14] و Ross [15] Kapur و Cho [16] و همچنین Richard و Robert [17] مورد استفاده قرار گرفته است. مبنای این روش تابع زیان تاگوچی است و در آن با الهام از تابع زیان تاگوچی توابع زیان درجه دو که دربرگیرنده مشخصه‌های کیفی و در مواردی واریانس مشخصه‌های کیفی است ارائه گردیده است.

تابع زیان Taguchi تابعی درجه دو از انحراف مشخصه کیفی موردنظر از مقدار هدف بصورت رابطه (۱) است.

$$\mathrm{Loss}\left(y(X)=k\left(y(X)-T\right)\right) \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، k ضریب زیان و T مقدار موردنظر از مشخصه کیفی است. Artiles-Leon از بسط تابع زیان تاگوچی تابع زیانی بصورت رابطه (۲) را پیشنهاد نمود.

$$L(y,X,t)=4\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{y_i(X)-T_i}{USL_i-LSL_i}\right]^2 \qquad (۲)$$

$$EL(y,t)=\sum_{i=1}^{k}k_i\left[\delta_i^2+(\mu_i-T_i)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}k_{ij}\left[\delta_{ij}^2+(\mu_i-T_i)(\mu_j-T_j)\right]\right] \quad (۳)$$

هرگاه در عمل هدف بدست آوردن کالا در سطح مشخصی از مشخصه‌های کیفی باشد. معمولاً این روش، روش مناسبی است. اما اگر هدف حداکثر یا حداقل نمودن مشخصه‌های کیفی کالا باشد این روش کارایی بالایی ندارد.

روش تابع تصمیم‌گیری برای اولین‌بار توسط Haringtan مطرح و مورد استفاده قرار گرفت و سپس Mcmllan و Gatza از این روش استفاده نمودند [1]. این روش بعداً توسط Derringer و Suich [18] گسترش یافت. ایده اساسی در این روش تبدیل یک مسئله چندهدفه به یک مسئله تک هدفه است. تابع تصمیم بکار رفته در بهینه‌یابی چندپاسخه در RSM مقادیر پاسخ را به کمک توابع برازش شده به مقادیری بین صفر و یک تبدیل می‌نمایند. این مقادیر میزان رضایت هر کدام از پاسخها را نشان می‌دهند. Harington در حالت یک طرفه برای تابع تصمیم رابطه (۴) و در حالت دوطرفه رابطه (۵) را پیشنهاد نمود.

$$d_i\left(y_i(X)\right)=e^{y_i(X)} \quad (۴)$$

$$d_i\left(y_i(X)\right)=e^{-|y_i(X)|} \quad (۵)$$

ایراد اساسی تابع تصمیم پیشنهادی Harington آنست که قابلیت گرفتن شکلهای مختلف را ندارد [9] به همین دلیل Derringer و Suich تابع توسعه یافته (۶) و (۷) را به ترتیب برای حالت یکطرفه و دوطرفه پیشنهاد نمودند [18].

$$d_i\left(\hat{y}_i(x)\right)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad \hat{y}_i(X)\le y_{\min i} \\ \left(\dfrac{\hat{y}_i-\hat{y}_{\min i}}{\hat{y}_{\max}-\hat{y}_{\min i}}\right)^r & \text{if} \quad \hat{y}_{\min}\ge\hat{y}_i(X)\le\hat{y}_{\max i} \\ 1 & \text{if} \quad \hat{y}_i(X)\le y_{\max i} \end{cases} \quad (۶)$$

$$d_i\left(\hat{y}_i(x)\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{\hat{y}_i-\hat{y}_{\min i}}{\hat{T}_i-\hat{y}_{\min i}}\right)^r & \text{if} \quad \hat{y}_{\min}\le \hat{y}_i(X)\le T_i\\ \left(\dfrac{\hat{y}_{\max i}-\hat{y}_i}{\hat{y}_{\max}-T_i}\right)^r & \text{if} \quad T_i\le \hat{y}_i(X)\le \hat{y}_{\max i}\\ 0 & \text{if} \quad \text{در سایر نقاط}\end{cases} \tag{٧}$$

در روابط فوق T_i مقدار مطلوب از مشخصه i ام و r و s پارامترهای تابع تصمیم می‌باشند. Derringer و Suich رابطه (٨) را برای محاسبه تابع تصمیم پیشنهاد نمودند.

$$D(y)=\left[d_1(y_1).d_2(y_2)...........d_k(y_k)\right]^{1/k} \tag{٨}$$

آنچه Derringer و Suich تحت عنوان تابع تصمیم ارائه نموده‌اند در واقع فرمول L-P متر یک است و بیشتر ویژگی یک تابع ارزش را دارد. Zimmermann با استفاده از منطق فازی روشی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چند هدفه ارائه داد [27] و سپس Cheng و همکاران روش Zimmermann را جهت بهینه‌سازی مسائل چندپاسخه آماری توسعه دادند [28]. طولانی بودن حل مسئله از نقاط ضعف این روش می‌باشد. بخاطر اینکه در این روش برای حل یک مسئله m هدفه بایستی 2m+1 مسئله بطور جداگانه حل شود.

نورالنساء و همکاران روشی جهت استخراج تابع تصمیم‌گیری و بکارگیری آن در بهینه‌سازی مسائل چندپاسخه ارائه دادند [29]. در اینجا نیز طولانی بودن حل مسئله از نقاط ضعف این روش می‌باشد بخاطر اینکه با افزایش تعداد مشخصه‌های کیفی و افزایش اهداف مسئله حل مسئله طولانی خواهد شد. به همین دلیل طراحی یک الگوریتم با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی فازی برای بهینه‌سازی مسائل چندپاسخه آماری که بتواند ضعف‌های موجود را پوشش دهد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۱- روش پیشنهادی برای حل مسائل چندپاسخهٔ آماری

مسئله رایج در صنایع تولیدی عبارتست از انتخاب یک مجموعه از شرائط ورودی یا مجموعه‌ای از مقادیر X_j بطوری که کیفیت تولید موردنظر (Y_j) دارای شرایط مطلوب باشد. این مسئله منجر به بهینه‌سازی همزمان متغیرهای پاسخ Y_j می‌شود که هر یک بستگی به یک مجموعه از متغیرهای ورودی X_1 و X_2 و ... و X_n دارد. در این‌گونه مسائل هدف این است که مقادیر X_jها در سطوحی انتخاب شوند که مجموعه Y_j ها بهینه گردند. بعبارتی مسئله متغیرهای پاسخ بصورت زیر مطرح می‌شود.

$$\begin{aligned}&\text{Max}: Z_j = Y_j(X_1 \quad X_2 \dots X_n) \qquad j=1,2,\dots,k\\&\text{Min}: r_j = R_j(X_1 \quad X_2 \dots X_n) \qquad j=k+1,k+2,\dots\dots,m\\&\text{s.t}:\\&\qquad -1 \le x_j \le 1 \qquad j=1,2,\dots,n\end{aligned} \tag{۹}$$

که با تغییر متغیر $(j=k+1,k+2,\dots,m)Z_j=-r_j$ مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه بالا بصورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\text{Max}: Z_j = Y_j(X_1 \quad X_2 \dots X_n) \qquad j=1,2,\dots,m\\&\text{s.t}:\\&\qquad -1 \le x_j \le 1 \qquad j=1,2,\dots,n\end{aligned}$$

تبصره ۱. اگر مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه را برای هر یک از توابع هدف بطور جداگانه حل کنیم (X_j^*, Z_j^*) و این جوابها را در سایر توابع هدف قرار دهیم آنگاه برای هر تابع هدف دو مقدار حد بالا و حد پائین (L_j, U_j) بعنوان بهترین حالت و بدترین حالت بدست می‌آید.

اثبات: برای هر تابع هدف i ام بطور جداگانه مسئله زیر را حل می‌کنیم $(i=1,2,\dots,m)$ به عبارتی m مسئله بصورت زیر حل می‌کنیم:

جدول ۱- دامنه تغییرات توابع هدف

	Z_1	Z_2	.....	Z_m	X_1	X_2	.....	X_n
$\text{Max}(Z_1)$	$Z_{11} = Z_1^*$	Z_{12}	.....	Z_{1m}	X_{11}	X_{12}	.....	X_{1n}
$\text{Max}(Z_2)$	$Z_{21} = Z_1$	Z_{22}	.....	Z_{2m}	X_{21}	X_{22}	.....	X_{2n}
.				.				.
.				.				.
.				.				.
$\text{Max}(Z_m)$	$Z_{m1} = Z_1$	Z_{m2}	.....	$Z_{mm} = Z_m^*$	X_{m1}	X_{m2}	.....	X_{mn}

Z_{ij}: مقدار تابع هدف j ام به ازای مقادیر متغیرهای بهینهٔ مسئله تابع هدف i ام.

X_{ij}: مقدار بهینه متغیر X_j در تابع هدف i ام.

$$U_j = Z_j^*$$
$$L_j = \min_i (Z_{ij})$$

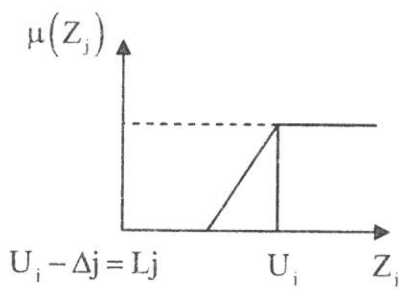
تبصره ۲. برای هر تابع هدف یک تابع عضویت فازی وجود دارد.

اثبات:

$$U_j = Z_j^*$$
$$L_j = \min_i (Z_{ij})$$

$\Delta j = U_j - L_j$: تولرانس تابع هدف Z_j

$\mu(Z_j)$: تابع عضویت فازی تابع هدف Z_j



شکل ۱- تابع عضویت تابع Z_j

$$\mu\left(Z_j\right)=\begin{cases} 0 & z_j < U_j-\Delta_j \\ \dfrac{z_j-\left(U_j-\Delta j\right)}{\Delta j} & U_j-\Delta_j \le Z_j \le U_j \\ 1 & Z_j \ge U_j \end{cases} \qquad (۱۱)$$

قضیه ۱. مسئله متغیرهای پاسخ را بصورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & \max : \alpha \\ & s.t: \\ & \frac{Z_j}{\Delta_j}+n_j-P_j=\frac{U_j}{\Delta_j} && j=1,2,\ldots,m \\ & \alpha+n_j \le 1 && j=1,2,\ldots,m \\ & -1 \le X_j \le 1 && j=1,2,\ldots,n \\ & \alpha \in \left[0 \quad 1\right] \\ & n_j \ge 0 \qquad P_j \ge 0 && j=1,2,\ldots,m \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که در آن

P_j: انحراف مثبت تابع $\dfrac{Z_j}{\Delta_j}$

n_j: انحراف منفی تابع $\dfrac{Z_j}{\Delta_j}$

α:درصدی که هر تابع هدف به حالت بهینه خودش رسیده است.

اثبات:

$$\mu\left(Z_j\right)=\begin{cases} 0 & Z_j < U_j-\Delta_j \\ \dfrac{Z_j-\left(U_j-\Delta_j\right)}{\Delta_j} & U_j-\Delta_j \le Z_j \le U_j \\ 1 & U_j \le Z_j \le U_j+\Delta_j \end{cases}$$

$$\alpha = \min_j \mu\left(Z_j\right) \Rightarrow$$

$$\max : \alpha$$

$$\text{a. } \alpha \le \frac{Z_j}{\Delta_j} - \frac{U_j}{\Delta_j} + 1 \quad , \quad \frac{U_j}{\Delta_j} - 1 \le \frac{Z_j}{\Delta_j} \le \frac{U_j}{\Delta_j} \quad \text{for} \quad \text{som} \quad j$$

$$\text{b. } \frac{U_j}{\Delta_j} \le \frac{Z_j}{\Delta_j} \le \frac{U_j}{\Delta_j} + 1 \quad \text{for} \quad \text{som} \quad j$$

برای محدودیت‌های قسمت a فرض کنید: $\frac{Z_j}{\Delta_j} = \frac{U_j}{\Delta_j} - n_j$ باشد

(n_j: انحراف منفی)

حال داریم:

$$\alpha + n_j \le 1 \quad , \quad \frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j = \frac{U_j}{\Delta_j} \tag{۱۳}$$

برای محدودیت قسمت b فرض کنید: $\frac{Z_j}{\Delta_j} = \frac{U_j}{\Delta_j} - p_j$ باشد

(p_j: انحراف مثبت)

حال داریم:

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} - p_j = \frac{U_j}{\Delta_j} \tag{۱۴}$$

حال محدودیت‌های (۱۳) و (١٤) را در هم ترکیب می‌کنیم. در نهایت داریم:

$$\max : \alpha$$

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j - P_j = \frac{U_j}{\Delta_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\alpha + n_j \le 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$-1 \le X_j \le 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\alpha \in [0 \quad 1] \qquad n_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$P_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

قضیه تبعی[1] ۱. اگر میزان دسترسی به حالت بهینه هر یک از اهداف متفاوت باشد و اهداف از نظر تصمیم‌گیرنده دارای اهمیت یکسان نباشند آنگاه جواب مطلوب تصمیم‌گیرنده از حل مدل ریاضی زیر بدست می‌آید:

$$\max : \sum_{j=1}^{m} W_j \alpha_j$$

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j - P_j = \frac{U_j}{\Delta_j}$$

$$\alpha + n_j \leq 1$$

$$-1 \leq X_j \leq 1$$

$$\alpha_j \in [0 \quad 1]$$

$$n_j \geq 0 \qquad P_j \geq 0$$

اثبات: نتیجهٔ قضیه (۱) است با فرض‌های زیر:

$$\alpha_j \leq \mu(Z_j)$$

α_j: میزان دسترسی به حالت بهینه تابع هدف Z_j

W_j : وزن یا اهمیت تابع هدف Z_j از نظر تصمیم‌گیرنده

قضیهٔ تبعی ۲. اگر متغیرهای پاسخ دارای بهترین مقدار اسمی باشند و اهداف از نظر تصمیم‌گیرنده دارای اهمیت یکسان نباشند و میزان دسترسی به حالت بهینه هر یک از اهداف متفاوت باشد آنگاه جواب مطلوب تصمیم‌گیرنده از حل مدل ریاضی زیر بدست می‌آید:

$$\max : \sum_{j=1}^{m} W_j \alpha_j$$

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j - P_j = \frac{T_j}{\Delta_j}$$

$$\alpha_j + n_j + P_j \leq 1 \qquad (۱۶)$$

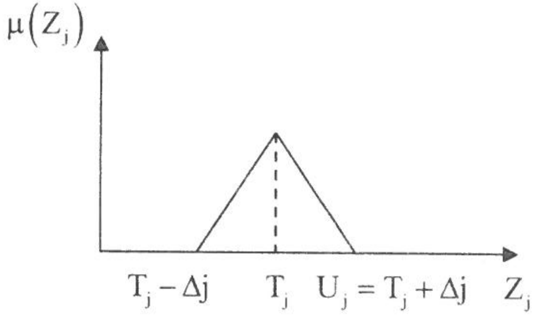
$$-1 \leq X_j \leq 1$$

$$\alpha_j \in [0 \quad 1]$$

1 - Corollary

که در آن: T_j مقدار اسمی تابع هدف Z_j است.

اثبات: نتیجه قضیه (۱) است با فرض‌های زیر:



شکل ۲- تابع عضویت تابع هدف Z_j

$$\mu(Z_j)=\begin{cases} 0 & Z_j < T_j - \Delta_j \\ \dfrac{Z_j-(T_j-\Delta_j)}{\Delta_j} & T_j-\Delta_j \le Z_j < T_j \\ \dfrac{T_j+\Delta_j-Z_j}{\Delta_j} & T_j \le Z_j < T_j+\Delta_j \\ 0 & Z_j \ge T_j+\Delta_j \end{cases} \qquad (۱۷)$$

$\alpha_j \le (Z_j)$

قضیه تبعی ۳. اگر k متغیر پاسخ در زمینه هرچه بزرگتر، بهتر باشند و m-k متغیر پاسخ در زمینه مقدار اسمی بهتر باشند و اهداف از نظر تصمیم‌گیرنده دارای اهمیت یکسان نباشند آنگاه جواب مطلوب از نظر تصمیم‌گیرنده از حل مدل ریاضی زیر بدست می‌آید:

$$\max : \sum_{j=1}^{m} W_j \alpha_j$$

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j - P_j = \frac{U_j}{\Delta_j} \qquad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j - P_j = \frac{T_j}{\Delta_j} \qquad j = k+1, k+2, \dots, m$$

$$\alpha + n_j \le 1 \qquad j = 1, 2, \dots, k \tag{۱۸}$$

$$\alpha + n_j + p_j \le 1 \qquad j = k+1, k+2, \dots, m$$

$$-1 \le X_j \le 1 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha \in [0 \quad 1]$$

$$n_j \ge 0 \qquad P_j \ge 0$$

اثبات: از قضیه تبعی ۱ و ۲ حاصل می‌شود.

الگوریتم:

قدم اول: مسئله متغیرهای پاسخ را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\text{Max} : Z_j = Y_j (X_1 \quad X_2 \dots X_n) \qquad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\text{Min} : r_j = R_j (X_1 \quad X_2 \dots X_n) \qquad j = k+1, k+2, \dots, m$$

$$\text{s.t} : -1 \le x_j \le 1 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

قدم دوم:

مسئله متغیرهای پاسخ را بصورت زیر درآورید:

$$(-r_j = Z_j \quad j = k+1, k+2, \dots, m)$$

$$\text{Max} : Z_j = Y_j (X_1 \quad X_2 \dots X_n) \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{s.t} : -1 \le X_j \le 1 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

قدم سوم:

مسئله را برای هر یک از توابع هدف بطور جداگانه حل کنید و جوابها را بدست آورید. این جوابها را در سایر توابع هدف قرار دهید و در نتیجه برای هر تابع هدف ۲ مقدار حد بالا و حد پائین $(L_j \quad U_j)$ را بعنوان بهترین و بدترین حالت بدست آورید. سپس $\Delta_j = U_j - L_j$ را بدست آورید.

قدم چهارم:

به کمک تصمیم‌گیرنده وزن اهداف را بدست آورید (W_j)ها و سپس مدل برنامه‌ریزی ریاضی را حل کنید:

$$\max : \sum_{j=1}^{m} W_j \alpha_j$$

$$\frac{Z_j}{\Delta_j} + n_j - P_j = \frac{U_j}{\Delta_j} \qquad j = 1, 2, ..., m$$

$$\alpha + n_j \le 1 \qquad j = 1, 2, ..., m$$

$$-1 \le X_j \le 1 \qquad j = 1, 2, ..., n$$

$$\alpha \in [0 \quad 1] \qquad j = 1, 2, ..., m$$

$$P_j \ge 0 \ , \quad n_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, ..., m$$

۲- مثال عددی و مقایسه

طرح آزمایشی مورد استفاده، طرح مرکب مرکزی است که در آن اثر چهار متغیر قابل کنترل، درصد نشادر در فلاکس کوره (X_1)، ضخامت آلیاژ قلع و سرب روی لوله رادیاتور (X_2) و درصد قلع در آلیاژ روی لوله رادیاتور (X_4) بر دو مشخصه کیفیخوردگی (Y_1) و چسبندگی (Y_2) بررسی شده است.

منحنیهای سطح پاسخ برای Y_1 و Y_2 بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} Y_1 = {} & 250.34 - 34.26X_1 + 43.91X_2 - 1.55X_3 + 6.75X_4 - 22.97X_2^2 \\ & -21.84X_3^2 - 23.22X_2^4 + 4.56X_1X_4 + 16.94X_2X_4 + 25.31X_3X_4 \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

$$Y_2 = 176.75 - 2.01X_1 + 30.6X_2 - 2.59X_3 + 16.87X_4 - 13.31X_1^2 - 13.19X_2^2 - 12.94X_3^2 + 12.44X_4^2 + 8.56X_1X_4 - 3.94X_2X_4 - 8.69X_3X_4 \quad (۲۰)$$

در نتیجه مسئله چندپاسخه مورد مطالعه بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} &\text{Max} : Z_1 = Y_1 \\ &\text{Maz} : Z_2 = Y_2 \\ &\text{s.t} : -1 \le x_j \le 1 \qquad j = 1,2,3,4 \end{aligned} \quad (۲۱)$$

ابتدا جداگانه دو مسئله زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &\text{Maz} : Z_1 = Y_1 \\ &\text{s.t} : \\ &-1 \le X_j \le 1 \qquad j = 1,2,3,4 \\ &Z_2 = Y_2 \end{aligned} \quad (۲۲)$$

$$\begin{aligned} &\text{Maz} : Z_2 = Y_2 \\ &\text{s.t} : \\ &-1 \le X_j \le 1 \qquad j = 1,2,3,4 \\ &Z_1 = Y_1 \end{aligned} \quad (۲۳)$$

بعد از حل دو مسئله بالا خواهیم داشت:

جدول ۲- دامنه تغییرات توابع هدف

	Z_1	Z_2	X_1	X_2	X_3	X_4
$\text{Max}(Z_1)$	311	180	−1	1	0.297	0.574
$\text{Max}(Z_2)$	272	198	0.116	1	−0.099	0.594

حال داریم:

$$\Delta_1 = 311 - 272 = 39 \qquad U_1 = 311$$

$$\Delta_2 = 198 - 180 = 18 \qquad U_2 = 198$$

فرض کنید از نظر تصمیم‌گیرنده (DM)،

$w_2 = 0.75$ و $w_2 = 0.25$ باشد.

حل با روش پیشنهادی

$$
\begin{aligned}
&\max : 0.25\alpha_1 + 0.75\alpha_2 \\
&\frac{Y_1}{\Delta_1} + n_1 - p_1 = \frac{U_1}{\Delta_1} \\
&\frac{Y_2}{\Delta_2} + n_2 - p_2 = \frac{U_2}{\Delta_2} \\
&n_1 + \alpha_1 \le 1 \\
&n_2 + \alpha_2 \le 1 \\
&-1 \le X_i \le 1 \qquad i = 1, 2, \dots, 4 \\
&n_i \ge 0 \qquad p_i \ge 0 \qquad \alpha_i \in [0 \quad 1]
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

بعد از حل داریم:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = -0.10392 \qquad && Y_1 = 280.4013 \\
&X_2 = 1 && Y_2 = 197.1377 \\
&X_3 = 0.00042 \\
&X_4 = 0.487
\end{aligned}
$$

حل سه مسئله بالا با نرم‌افزار LINGO صورت گرفته است.

مقایسه بین روش پیشنهادی و روش‌های موجود در این مثال صورت گرفته است. جدول ۳ جواب بدست آمده از روش ارائه شده و روش‌های مختلف را نشان می‌دهد.

جدول ۳- جواب بهینه بدست آمده از روش‌های مختلف

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
Keeney & raiffa	0	1	0.1764	0.5645	278.8	196.7
Derringer & suich	0	1	0	0	271.3	194.16
روش اهداف حددار	0	1	0.3802	0.7173	279.5	193.8
روش نورالنساء	0	1	0.212	0.58625	279.03	196.35
روش ارائه شده	-0.10392	1	0.00042	0.4874	280.4013	197.1377

چنانچه مشاهده می‌شود از نظر تصمیم‌گیرنده (DM) روش ارائه شده بر

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله بهینه‌سازی مسائل چندپاسخه آماری با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی فازی ارائه شد. سرعت بیشتر روش ارائه شده نسبت به سایر روش‌ها از مزایای این روش است. چون در روش ارائه شده اگر m سطح پاسخ داشته باشیم کلاً m+1 مسئله حل می‌کنیم ولی در روش‌های موجود بایستی 2m+1 مسئله حل شود. همچنین مقایسه‌ای بین روش‌های موجود و ارائه شده انجام گرفت که از نظر تصمیم‌گیرنده روش ارائه شده بر روش‌های موجود برتری دارد. با توسعه این روش زمینه تحقیقاتی جدید فراهم گشته است که در حال حاضر مورد بررسی می‌باشند، از جمله:

۱- ارائه جوابهای بهتر از نظر تصمیم‌گیرنده،

۲- حل مسئله در کمترین زمان؛ بعبارتی اگر m سطح پاسخ داشته باشیم برای بهینه‌سازی بتوانیم کمتر از m+1 مسئله را حل کنیم.

منابع و مآخذ

منابع فارسی

۱- نورالنساء رسول و سلطان‌پناه هیرش (۱۳۸۳) "ارائه روشی جهت استخراج تابع تصمیم‌گیری و بکارگیری آن در بهینه‌سازی چندپاسخه در چارچوب روش سطح پاسخ (RSM) " **مجله بین‌المللی علوم مهندسی**، جلد پانزدهم، شماره یکم، صفحه ۲۲۳-۲۲۱ دانشگاه علم و صنعت ایران.

منابع لاتین

1-Carlyle W.M., Montgomery D.C. and Runger G.C., (2000) "optimization problems and Methods in Quality control and Improvement" **journal of Quality Technology**, 2000, pp. 1-31.

2- Box G.E.P, Hunter W.G, and Hunter J.S. (1978) "Statistics for Experimenters: and Introduction to Design data Analysis and Model Bulding" John Wiley & sons, Newyork.

3- Haftka R,Scott E.P and Cruz J.R, (1998) "Optimization and Experiments: A Survey" **Applied Mechanics Review**, pp 435-448.

4- Wang G.Gary, "Adaptive Response surface Method using Inherited Latin Hypercube Design points" **Journal of Mechanical Design** 2002 pp.1-31.

5- Richard suhr and Robert G.Baston, (2001) "Constrained Multivariate Loss Function Minimization "**Quality Engineering**. , pp. 475-483.

6- Chiao C.T., Tamede M., "Analyzing Experiments with Correlated Multiple Responses" **Journal of Quality Technology**, pp, 451-465.

7- Pignatiello J.J, "Strategies for Robust Multirespones"Quality Engineering, 1993, pp.5-15.

8- Myers R.and Carter W.J, (1973)."Response surface Techniques for Dual Response Systems" **Technometrics**, pp. 301-3017.

9- Biles W. (1973). "A Response surface Methods for Experimental optimization of Multi Response Processes" **Industrial and Engineering chemistry**, pp. 152-158.

10- Myers. R.Khuri A. and Vining G. (1973). "Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust parameter Design Approach" **the**

11- Lo Y. and Tang K. (1990). "Economic Design of multi – Characteristic Models for a three class screening" **procedure Journal product**. pp. 2341-2351.
12- Pignatiello J.J. (1993). "Strategies for Robust Multiresponse "Quality Engineering, pp. 5-15.
13- Winstion W.L.,(1994) "operations Reasearch Applications and Algorithms" 3rd ed. Duxbury press, Belmont. CA.
14- Artiles – Leon N.(1996) . "A pragmatic Approach to Multiple – Response problems using Loss Functions "**Quality Engineering** , pp.213-220.
15- Ross P.J, (1996) . "Techniques for **Quality Engineering** "2 nd ed., Mc Graw – Hill, New York.
16- Kapur C.K, and cho B.R., (1996), "Economic Design of the specification Region for Multiple Quality characteristics" II E Trans. , pp . 237-248.
17- Robert G.B., and Richard S. (2001) "Constrained Multivariate Loss Function Minimization" **Quality Engineering**, pp. 475-483.
18- Derringer G. and Suich R.,(1980) "Simultneous optimization of several response variables "**Journal of Quality Technology**, pp.337-345.
19- Del Castillo E., Montgomery D.C. & Mc crville D.R., (1996) "Desirability Functions for Multiple Response optimization" **Journal of Quality Technology**, pp. 337-345.
20- Drucker p.p. (1974). "Management: Tasks Responsibilities practices" Harper and row, New York.
21- Stewart, T.J., (1992). " A Critical Survey on the Status of Multiple Criteria Decision Making Theory and Practic" **OMEGA**, pp. 569-586.
22- French, S., (1984) "Interactive Multi-objective programming: its Aims, Applications and Demands" **Journal of the operational Reasarch Society**, pp. 827-834.
23- Keeney, R.L.(1992) "Value Focused Thinking" Harvard University press.
24- Von Neumann J., and O.Morgenstern, (1974) "theory of Games and Economic Behavior" Princeton University press, 1947.
25- Keeney R.L. And Raiffa H., (1976) "Decisions with Multiple objectives: preferences and value Tradeoffs" John Wiley, New York.

26- Shin I Chang, Rajiv Shivpuri, (1995). "A Multiple – Objective Decision – Making Approach for Assessing Simultianeous Improvement in Die Liee and Casting Quality in a Die Casting Process" **Quality Engineering**, pp. 371-383.
27- H.J. Zimmermann, (1978) "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", **Fuzzy sets and Systems**, 45-55.
28- CHI-BIN CHENG, C.J. CHENG and E.S.LEE (2002) "Neuro – Fuzzy and Genetic Algorithm in Multiple Response optimization," **Computers and Mathematics with Applications** 44, 1503-1514.