روشی برای تحلیل گذرای پایایی و دسترس‌پذیری یک سیستم با اجزاء و تعمیرکاران یکسان

دکتر مقصود امیری*

چکیده

در این مقاله با استفاده از مدلهای مارکوف، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تحلیل گذرای دسترس‌پذیری و پایایی یک سیستم با اجزاء و تعمیرکاران یکسان ارائه می‌شود و سیستم درنظر گرفته شده دارای اجزای سری یا موازی یا k از n می‌باشد. دسترس‌پذیری سیستم با اجزاء موازی، اجزاء سری و سیستم k از n در حالت گذرا ($A(t)$) و پایدار($A(\infty)$) و مدت زمانی که طول می‌کشد تا سیستم پایایی به حالت پایدار برسد محاسبه می‌شود. روش ارائه شده در مقایسه با روش‌های موجود قدرت

---

* - عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی

بیشتری داشته و هم چنین از زیربنای ریاضی قویتری برخوردار است. در پایان روش پیشنهادی با یک مثال توضیح داده می‌شود.

کلیدواژه‌ها: پایایی، گذرا، مدل‌های مارکوف، دسترس‌پذیری، مقادیر ویژه، بردارهای ویژه.

مقدمه

نظریهٔ صف و پایایی از مهمترین کاربردهای فرآیندهای تصادفی بشمار می‌روند. در اکثر سیستمها چون سیستم‌های حمل و نقل، ترافیک فرودگاه، تعمیرات و نگهداری و پالایشگاهها با مدلهای صف و پایایی مواجه هستیم. معمولاً برای طراحی سیستم‌های قابلیت اطمینان(پایایی) بالا تکرار بیش از حد اجزاء لازم است. بسیاری از سیستم‌ها شامل اجزای حالتهای مختلف شکست می‌باشند چندین نویسنده یک سیستم K از N منوط به دو حالت شکست را بررسی کرده‌اند [2]. مصطفی[1] با استفاده از مدلهای مارکوف و معادلات دیفرانسیل قابلیت‌گذاری سیستم‌گذاری k-out-of-N منوط به دو حالت شکست را بررسی کرده است. او در حالت گذرا قابلیت اطمینان سیستم‌های غیرقابل تعمیر را بررسی کرده است[3].

مصطفی نتایج بدست آمده در مرجع [۱] را تعمیم داده است و با استفاده یک مجموعه معادلات دیفرانسیل خطی همزمان و زنجیره‌های مارکوف پایایی سیستم‌های قابل تعمیر و غیرقابل تعمیر K از G: N منوط به M حالت شکست را در حالت گذرا بررسی کرده است و متوسط زمان بین شکست سیستم را محاسبه نموده است[4].

سرهان و آبواموه[2] با بکارگیری مدلهای شک پایایی سیستم غیرقابل تعمیر k از n با اجزاء متفاوت و غیرمستقل را در حالت گذرا بررسی کردند [5]. بعداً سرهان و ال ـ گوهری[3][6] کار سرهان و آبواموه را بوسیله تخمین‌گرهای بیز توسعه دادند که منجر به بررسی پایایی یک سیستم با سه جزء سری، غیریکسان و غیرقابل تعمیر شده است.

---

1 -Mustafa
2 -Sarhan & Abouammoh
3 -E1-Gohary& Sarhan

در این مقاله با استفاده از مدلهای مارکوف، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تحلیل گذرای دسترس‌پذیری و پایایی یک سیستم با اجزاء و تعمیرکاران یکسان ارائه می‌شود. این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است در بخش اول مقدمه، در بخش دوم تعاریف و نمادگذاری، در بخش سوم مدل‌های مارکوف و در بخش چهارم اثبات قضایا و روش پیشنهادی، در بخش پنجم مثال عددی و در بخش ششم نتیجه‌گیری ارائه شده است.

تعاریف و نمادگذاری

نمادهای مورد استفاده در این مقاله عبارت از:

$N(t)$: تعداد اجزاء خراب تا لحظهٔ t ام

$N'(t)$: تعداد اجزاء تعمیر شده تا لحظهٔ t ام

$X(t)$: تعداد اجزاء خراب در لحظهٔ t ام

$$X(t) = N(t) - N'(t) \qquad (۱)$$

$p_n(t)$: احتمال اینکه در لحظهٔ t ام n جزء خراب باشد

$$p_n(t)=P(X(t)=n) \qquad (۲)$$

$A(t)$: احتمال اینکه دستگاه یا سیستم صرفنظر از پیشینه خرابی‌ها و تعمیرهایی که در گذشته داشته است در زمان t کار کند.

$A(\infty)$: دسترس‌پذیری بلندمدت یا پایا

$$A(\infty) = \lim_{t \to +\infty} A(t) \qquad (۳)$$

تعریف ۱. اگر Q ماتریس نرخ انتقال و $P(t)$ ماتریس احتمال انتقال در زنجیره‌های مارکف، نمایی بازمان پیوسته باشد آنگاه داریم.

a. $$P'(t) = P(t).Q \qquad (۴)$$

b. $$P_n(t)=P_n(0).Q \qquad (۵)$$

جائیکه:

$$P_n(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t),\ldots., p_n(t))$$
$$P_n(0) = (p_0(0), p_1(0), p_2(0),\ldots, p_n(0) = (1,0,0,0,\ldots,0)$$
$$P(t) = (p_{ij}(t))$$

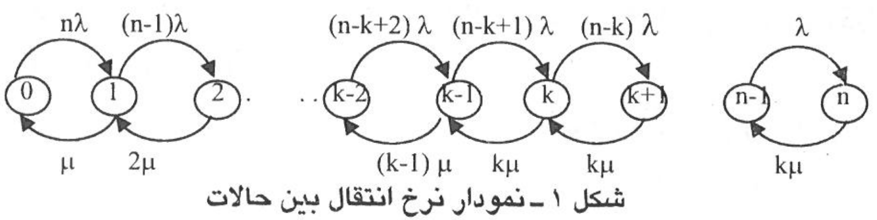
که در آن Q ماتریس مربع $P(t)$ ماتریس‌مربع و $P_n(t)$ و $P_n(0)$ بردارهای سطری می‌باشند ([8])

مدل‌های مارکوف و شرح مسئله

یک سیستم دارای n جزء یکسان را در نظر بگیرید که اجزاء در داخل سیستم می‌تواند به صورت سری یا موازی یا k از n قرار بگیرند در حالت سیستم با اجزاء موازی، سیستم موقعی کار می‌کند که حداقل یک جزء سالم باشد در حالت سیستم با اجزاء سری، سیستم موقعی کار می‌کند که همه اجزاء سالم باشند در حالت سیستم k از n سیستم موقعی کار می‌کند که حداقل k جزء از n جزء سالم باشند. فرض می‌شود که مدت زمان خرابی بین دو جزء دارای متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ است. همچنین k تعمیرکار یکسان برای تعمیر و سرویس اجزاء وجود دارد که زمان سرویس هر جزء توسط هر تعمیرکار یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر μ است. در این مقاله به دنبال روشی هستیم که دسترس‌پذیری این سیستم را در هر لحظه از زمان مورد بررسی قرار دهد و مدت زمانی که طول می‌کشد تا سیستم به حالت پایدار برسد را محاسبه کند. فرض کنید $X(t)$ تعداد اجزای خراب شده در لحظهٔ t باشد آنگاه نمودار نرخ انتقال و ماتریس نرخ انتقال این مدل مارکوف به صورت زیر می‌باشد.

$X(t)$: تعداد خرابی در لحظه t ام

$p_n(t)=P(X(t)=n)$



شکل ۱ ـ نمودار نرخ انتقال بین حالات

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ . \\ . \\ . \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} -n\lambda & n\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \mu & -\mu-(n-1)\lambda & (n-1)\lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & 0 \\ . & . & . & & \\ . & . & . & \dots & 0 \\ . & . & . & & \\ 0 & 0 & \dots & k\mu & -k\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

روش پیشنهادی

تحلیل گذرای پایایی و دسترس‌پذیری یک سیستم با اجزاء و تعمیرکاران یکسان مبتنی بر قضایای زیر می‌باشند.

قضیه ۱. اگر Q ماتریس نرخ انتقال و P(t) ماتریس احتمال انتقال در زنجیره‌های مارکوف نمایی با زمان پیوسته باشد آنگاه داریم.

a. $P(t)=e^{Q.t}$ (۶)

b. $P_n(t)=P_n(0).e^{Q.t}$ (۷)

(Q ماتریس مربع P(t) ماتریس مربع و $P_n(t)$ بردار سطری و $P_n(0)$ برداری سطری و $e^{Q.t}$ ماتریس مربع و t زمان)

اثبات:

$$P'(t) = P(t).Q \Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = P(t).Q$$

$$\Rightarrow \frac{dP(t)}{P(t)} = Q.dt \Rightarrow \int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int Q dt$$

$$\Rightarrow \ln P(t) = Q.t + C.I \Rightarrow e^{\ln p(t)} = e^{Q.t}.e^{C.I}$$

I : ماتریس واحد

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(t) = e^{Q.t}}.e^{C.I}$$

از طرفی داریم:

$$P(0) = I \Rightarrow P(t) = e^{Q.t}$$

طبق تعریف ۱ داریم:

$$P_n(t) = P_n(0).P(t) = P_n(0).e^{Q.t}$$

قضیه ۲. فرض کنید Q یک ماتریس مربع $n\times n$ باشد و دارای n مقدار ویژه غیرتکراری باشد آنگاه داریم:

$$e^{Q.t}=V.e^{d.t}.V^{-1} \qquad (۸)$$

که در آن: d ماتریس قطری مقادیر ویژه:

$$d=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0...0\\ 0 & \lambda_2 & 0...0\\ 0 & 0 & 0...\lambda_n\end{pmatrix}$$

λ_i: مقدار ویژهٔ i ام

و v ماتریس بردارهای ویژه و v^{-1} معکوس ماتریس v و t زمان

اثبات:

$$P(t)=e^{Q.t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Q.t)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(Q)^k$$

چون Q دارای مقادیر ویژهٔ غیرتکراری می باشد بنابراین داریم:

$$Q=V.d.V^{-1}$$

حال داریم:

$$Q^k=V.d^k.V^{-1}$$

حال در رابطهٔ بالا قرار می دهیم:

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(V.d^k.V^{-1})=\sum_{k=0}^{\infty}V\frac{(d.t)^k}{k!}.V^{-1}=V(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(d.t)^k}{k!})V^{-1}=V.e^{d.t}.V^{-1}$$

قضیه ۳. در مسئله $P(t)=e^{Q.t}$ که در Q ماتریس نرخ انتقال می باشد یکی از مقادیر ویژهٔ ماتریس Q صفر و بقیهٔ مقادیر ویژه موهومی با قسمت حقیقی منفی می‌باشند.

اثبات: چون در ماتریس نرخ انتقال مجموع هر سطر صفر می باشد بنابراین یکی از مقادیر ویژهٔ ماتریس Q صفر است.

طبق قضیهٔ ۲ داریم:

$$P(t)=V.e^{d.t}.V^{-1}=(p_{ij}(t))$$

$$P_{ij}(t)=\pi_j+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ijk}.e^{\lambda_k.t} \qquad (۹)$$

(π_j احتمال حدی α_{ijk} اعداد ثابت)

λ_k: مقدار ویژهٔ k ام

فرض کنید یکی از مقادیر ویژهٔ Q موهومی با قسمت حقیقی مثبت **باشد** آنگاه داریم:

$$\lim_{t \to +\infty} p_{ij}(t) = \infty$$

و این تناقض است چون بایستی داشته باشیم:

$$\lim_{t \to +\infty} P_{ij}(t) = \pi_j$$

قضیه ۴. در مسئله $P(t) = e^{Q.t}$ که Q یک ماتریس نرخ انتقال می باشد مدت زمانی که طول می‌کشد $P(t) = \Pi$ باشد (سیستم به حالت پایدار برسد) از رابطهٔ زیر بدست می‌آید (ε یک عدد مثبت بسیار کوچک مثلاً ε= ۰/۰۰۰۱)

$$t = \frac{\ln \varepsilon}{s_r} \qquad (۱۰)$$

جائیکه s_r بزرگترین قسمت حقیقی مقادیر ویژهٔ غیر صفر ماتریس Q می باشد و Π ماتریس مربع احتمالات حدی می باشد.

اثبات:

$$p_{kj}(t) = \pi_j + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{kjm}.e^{\lambda_m.t}$$

$$= \pi_j + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{kjm}.e^{(s_m + c_m.i).t}$$

s_mها منفی طبق قضیهٔ ۲ و $i = \sqrt{-1}$) π_j و α_{kjm} و s_m و c_m اعداد ثابت می‌باشند)

فرض کنید s_r بزرگترین s_mها باشد آنگاه برای tهای بزرگ داریم

$$\varepsilon = e^{s_r.t} \Rightarrow s_r.t = \ln \varepsilon \Rightarrow t = \frac{\ln \varepsilon}{s_r}$$

الگوریتم

قدم ۱: ابتدا ماتریس نرخ انتقال Q را بدست آورید.

قدم ۲: مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس Q را بدست آورید ضمناً برای مسائل بزرگ از نرم‌افزار MATLAB استفاده شود (v^{-1},d,v).

قدم ۳: $P(t)=V.e^{dt}.V^{-1}$ را محاسبه کنید.

قدم ۴: $P_n(t)=P_n(0).P(t)$ را محاسبه کنید.

قدم ۵: دسترس‌پذیری سیستم را به صورت زیر محاسبه کنید

۱-۵ : برای سیستم موازی داریم:

$$A(t)=1-p_n(t) \qquad (۱۱)$$

۲-۵ : برای سیستم سری داریم:

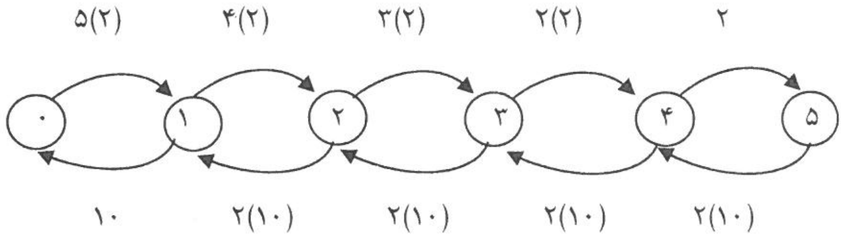
$$A(t)=p_0(t) \qquad (۱۲)$$

۳-۵ : برای سیستم k از n داریم:

$$A(t)=\sum_{i=0}^{n-k}p_i(t) \qquad (۱۳)$$

مثال عددی

دستگاهی دارای ۵ قطعه می باشد این دستگاه دارای دو تعمیرکار می باشد هنگامی که یک قطعه تعمیر گردیده و شروع بکار می کند زمان کارکرد آن تا خرابی بعدی یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{۱}{۲}$ ساعت می باشد زمان تعمیر این قطعات توسط هر کدام از تعمیر کاران یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{۱}{۱۰}$ ساعت می‌باشند می‌خواهیم پایایی این دستگاه (دسترس پذیری به دستگاه) را در هر لحظه از زمان بررسی کنیم نمودار نرخ انتقال و ماتریس نرخ انتقال این مسئله به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۲ ـ نمودار نرخ انتقال حالات

$$Q=\begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -18 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -26 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -24 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -20 \end{pmatrix}$$

$$P_n(0)=(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$
$$P_n(t)=P_n(0).V.e^{d.t}.V^{-1}=(P_0(t),p_1(t),p_2(t),p_3(t),p_4(t),p_5(t))$$

$$\begin{aligned}
P_0(t)&=/0159e^{-42/2t}+/0435e^{-30/9t}+/204e^{-9/02t}+/12e^{-22/3t}+/224e^{-15/5t}+/392\\
P_1(t)&=-/0512e^{-42/2t}-/0912e^{-30/9t}+/0201e^{-9/02t}-/148e^{-22/3t}-/123e^{-15/5t}+/392\\
P_2(t)&=/0541e^{-42/2t}+/0372e^{-30/9t}-/0931e^{-9/02t}-/0279e^{-22/3t}-/127e^{-15/5t}+/157\\
P_3(t)&=-/0234e^{-42/2t}+/0273e^{-30/9t}-/0871e^{-9/02t}+/054e^{-22/3t}-/0179e^{-15/5t}+/047\\
P_4(t)&=/00507e^{-42/2t}-/0206e^{-30/9t}-/0373e^{-9/02t}+/0129e^{-22/3t}+/0306e^{-15/5t}+/00943\\
P_5(t)&=-/000457e^{-42/2t}+/00377e^{-30/9t}-/00679e^{-9/02t}-/011e^{-22/3t}+/0135e^{-15/5t}+/000943
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

۱: اگر قطعات در داخل دستگاه موازی باشد داریم:

$$A(t)=1-p_5(t) \qquad A(\infty)=/999 \qquad (۱۵)$$

۲: اگر قطعات در داخل دستگاه سری باشد:

$$A(t)=p_0(t) \qquad A(\infty)=/392 \qquad (۱۶)$$

۳: اگر موقعی دستگاه کار کند که حداقل ۲ قطعهٔ سالم داشته باشد (۲ از ۵ تا):

$$A(\infty)=/9897 \qquad (۱۷)$$

$$A(t)=P_3(t)+P_2(t)+P_1(t)+P_0(t)=1-P_4(t)-P_5(t)$$

۴: مدت زمانی که طول می‌کشد تا سیستم به حالت پایدار برسد:

$$t = \frac{\ln \varepsilon}{s_r} = \frac{\ln/0001}{-9/02} \approx 1 \qquad (۱۸)$$

جدول ۱ ـ مقادیر A(t) به ازاء t‌های مختلف

t	A(t) در حالت موازی	A(t) در حالت سری	A(t) در حالت ۲ از ۵
/۰۵	۱	/۶۷۶۵	/۹۹۹۸
/۱	۱	/۵۳۸۲	/۹۹۸۷
/۱۵	/۹۹۹۸	/۴۷۲۱	/۹۹۶۸
/۲	/۹۹۹۷	/۴۳۷۹	/۹۹۴۹
/۲۵	/۹۹۹۵	/۴۱۹۳	/۹۹۳۳
/۴	/۹۹۹۲	/۳۹۸۷	/۹۹۰۷
/۵	/۹۹۹۱	/۳۹۵۱	/۹۹۰۱
/۷	/۹۹۹۱	/۳۹۳۱	/۹۸۹۷
۱	/۹۹۹۱	/۳۹۲۷	/۹۸۹۷
۱/۲	/۹۹۹۱	/۳۹۲۷	/۹۸۹۷
۱/۵	/۹۹۹۱	/۳۹۲۷	/۹۸۹۷

چنانچه مشاهده می‌شود سیستم بعد از یک واحد زمانی به حالت پایدار رسیده است.

هم‌چنین داریم:

(۱۹)

$$\pi_0 = /3927 \qquad \pi_1 = /3927 \qquad \pi_2 = /1571$$

$$\pi_3 = /0471 \qquad \pi_4 = /0094 \qquad \pi_5 = /0009$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مدلهای مارکوف، مقادیر و بردارهای ویژه پایایی و دسترس‌پذیری یک سیستم با اجزاء و تعمیرکاران یکسان در حالت گذرا بررسی شد. روش ارائه شده نسبت به روشهای گذشته دارای کارایی بالا می‌باشد چون روشهای گذشته فقط پایایی k از n (k-out-of-n) را در حالت گذرا بررسی می‌کنند و قادر به بررسی دسترس‌پذیری یک سیستم با اجزاء یکسان و تعمیرکاران یکسان نیستند.

روش ارائه شده در این مقاله قادر به بررسی پایایی و دسترس‌پذیری یک سیستم k از n (k-out-of-n) می باشد و مدت زمانی که طول می‌کشد تا سیستم به حالت پایدار برسد را محاسبه می‌کند. هم چنین زیر بنای ریاضی روش، عملکرد صحیح آنرا تضمین کرده است. با توسعه این روش زمینه تحقیقاتی جدیدی فراهم گشته است که در حال حاضر مورد بررسی می‌باشند از جمله:

۱ - تحلیل گذرای پایایی و دسترس‌پذیری یک سیستم با اجزای متفاوت و تعمیرکاران متفاوت.

۲ - تحلیل گذرای پایایی و دسترس‌پذیری یک سیستم با اجزای آماده بکار همراه با تعمیر.

۳ - تحلیل گذرای پایایی و دسترس‌پذیری تمامی مدلهای نمایی پایایی.

منابع و مآخذ

A. Sarhan, A.M. Abouammoh,(2001) Reliability of k-out-of-n nonrepairable systems with nonodependent components subjected to common shocks, **Microelectr. Relia***b*. 41 617-621.

A.I. El-Gohary, A.M. Sarhan, (2005) Estimation of the parameters in three non-independent component series system subjected to sources of shocks, **Applied Mathematics and Computation**. 16029-40.

Gross, D. and Harris, C. M.,(1985) **Fundamentals of Queueing Theory**. Wiley, New York.

Kapour, K.C., and Lamberson, L. R, (1997) **Reliability in Engineering Design**. Wiley, New York.

Moustafa, M. S (1996). Transient analysis of reliability with and modes. **Reliability Eng. Safety**, 53(1), 31-35.

Moustafa, M. S.(1998) Transient analysis of reliability with and modes. **Reliability Eng. Safety**, 59, 317-320.

Pham, H. & Pham, M.(1991) Optimal designs of {k, n-k+1}- Trans. **Reliability**, 40(5), 559-562.

Shao, J. & Lamberson, L. R.(1991) Modeling a shared – load k - out –of – n:G system. **Ieee trans. Reliability**, 40(2), 202 – 208.

Stewart, W. J., (1994) **Introduction to the numerical Solution of Markov chains**. Princeton university press, Princeton, NJ.