Motaleat-e modiriat-e sanati
Vol. 6,NO.15, Spring 2008

فصلنامه علمی - پژوهشی مطالعات مدیریت
صنعتی سال ششم، شماره ۱۵، بهار ۸٦
صفحات ۱٤۳ تا ۱٦٥

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از برنامه ریزی سازشی ضد ایده‌آل

دکترمقصود امیری *

چکیده

پس از معرفی مدل میانگین - واریانس مارکویتز، مسأله انتخاب سبد مالی بهینه چند هدفه تاکنون مورد توجه بسیاری از تصمیم‌گیران و برنامه‌ریزان مالی قرار گرفته است، بطوری که افراد تصمیم گیرنده اهداف و خواسته‌های سرمایه‌گذاری خود را در چارچوب مدل‌های ریاضی چند هدفه‌ای که تطابق بیشتری با واقعیات تصمیم‌گیری در انتخاب سبد مالی بهینه دارند، بیان می‌کنند. تاکنون روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی اینگونه مسائل معرفی شده‌اند که یکی از این روش‌ها، روش برنامه‌ریزی سازشی است. در این مقاله با توجه به اهمیت روز افزون سرمایه‌گذاری در سبدهای مالی، روشی جدید مبتنی بر برنامه‌ریزی سازشی برای بهینه‌سازی مسأله انتخاب سبد مالی چند هدفه توسعه داده شده که برنامه‌ریزی سازشی بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل نام دارد. به منظور بررسی عملکرد و قابلیت

---

* عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی

تاریخ دریافت: ۸۸/۷/۱۲
تاریخ پذیرش: ۸۸/۱۱/۳

کاربرد این روش، مورد کاوی با انتخاب سبد سهامی با ۳۵ شاخص سهام بازار سهام ایران انجام شده است. نتایج به دست آمده از مقایسه دو روش برنامه‌ریزی سازشی و روش پیشنهادی تحت شرایط یکسان، بیانگر آن است که نتایج روش ارائه شده سازگاری بیشتری با خواسته‌های تصمیم گیرنده نشان می‌دهند.

واژگان کلیدی: **بهینه‌سازی چند هدفه، برنامه‌ریزی سازشی، انتخاب سبد مالی.**

مقدمه

مدل سازی مسأله انتخاب سبد مالی با استفاده از اهداف چندگانه اولین بار توسط مارکویتز (۱۹۵۲) ارائه شد. در این مدل که میانگین - واریانس نام دارد، تصمیم گیرنده بر اساس اهداف مختلف و متضاد، سعی در انتخاب و تخصیص سبدی بهینه دارد. به منظور بهینه‌سازی مسأله انتخاب سبد بهینه، مدل میانگین - واریانس مارکویتز تاکنون مورد توجه بسیاری از تصمیم گیران و برنامه ریزان مالی قرار گرفته است، بطوری که می‌توان از آن به عنوان مقدمه "تئوری مالی نوین"[1] یاد کرد. لیکن نقاط ضعف این مدل را می‌توان به شرح زیر بر شمرد:

۱) عدم کارایی مدل میانگین - واریانس در برابر مدل‌های حقیقی (بل و همکاران، ۱۹۸۸).

۲) کوآدراتیک بودن مدل میانگین - واریانس و در نتیجه غیر خطی بودن مدل، بطوری که نتایج حاصل از بهینه‌سازی مدل به دلیل غیر خطی بودن در اغلب موارد بهینه محلی بوده و بهینه مطلق نمی‌باشد.

۳) با افزایش تعداد دارایی‌ها، ماتریس کوواریانس بازده دارایی‌ها با ابعاد بزرگتری ایجاد شده و بر حجم محاسبات افزوده خواهد شد.

به دلیل این مشکلات، زمینه لازم جهت استفاده از الگوریتم‌هایی که برطرف کننده این مسائل در مدل میانگین - واریانس مارکویتز بودند، فراهم گردید. به عنوان مثال، شارپ (۱۹۶۳؛ ۱۹۶۷)، التون و همکارانش (۱۹۷۶)، کانو (۱۹۹۰)، کانو و یامازاکی (۱۹۹۱) و یونگ (۱۹۹۸) هریک به منظور خطی سازی و بهبود کارایی مدل

1- Modern Finance Theory

میانگین- واریانس مارکویتز، الگوریتم‌هایی را پیشنهاد کرده‌اند (ناوروکی و کارتر، ۱۹۹۸؛ شینگ و ناگاساوا، ۱۹۹۹). شارپ (۱۹۶۴) مدیریت علمی سبدهای مالی را بنا نهاد. او ضریب حساسیت بتا را در حالی معرفی نمود که ضریب بتا نوسانات نرخ بازده هر سهام را در مقایسه با نوسانات نرخ بازده بازار نشان می‌دهد.

با در نظر گرفتن تحقیقات شارپ و دیگران، استفاده از ضریب بتا به عنوان معیار سنجش ریسک در چند سال اخیر رایج بوده است. استفاده از این ضریب برای تسهیل فرایند مدیریت سبد مالی بر اساس نظریه نوین سبد مالی[1] می‌باشد. بر اساس یک طبقه‌بندی، کل ریسک به دو جزء قابل کنترل (غیر سیستماتیک) و غیر قابل کنترل (سیستماتیک) تقسیم‌بندی می‌شود. مطابق مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای[2]، در صورت ایجاد یک سبد مالی متنوع از سهام منتخب بازار، ریسک غیر سیستماتیک قابلیت به حداقل رسیدن را پیدا می‌کند (شارپ، ۱۹۶۴). باید به این نکته توجه نمود که ریسک سیستماتیک حاصل تغییرات اقتصادی، سیاسی، اجتماعی و محیطی بازار سرمایه است و غیر قابل کنترل بوده و برای سهام مختلف روندی تقریباً یکسان دارد. شاهد این مدعا روند مشابه قیمت شاخص‌های مختلف در طول زمان است. ضریب بتا معیاری برای سنجش ریسک سیستماتیک است و می‌تواند به عنوان شاخصی برای رتبه‌بندی دارایی‌های مختلف مورد توجه قرار گیرد. در صورتی که ضریب بتا برای یک دارایی بزرگتر از ۱ باشد، نوسانات بازدهی آن سهم بیشتر از نوسانات بازار خواهد بود و به آن دارایی با ریسک بالا گفته می‌شود. بر عکس دارایی‌هایی با ضریب بتای کمتر از ۱ به مفهوم نوسانات کمتر از نوسانات بازار است. این دارایی نیز دارایی با ریسک پایین نامیده می‌شود. از مزایای استفاده از ضریب بتا به عنوان ضریب ریسک هر دارایی می‌توان موارد زیر را برشمرد:

۱) خطی‌سازی تابع هدف ریسک و استفاده از آن در بهینه‌سازی مسائل چند هدفه مالی.

۲) افزایش تعداد دارایی‌ها تأثیر چندانی بر تابع ریسک نخواهد داشت و حجم محاسبات چندان افزایش نمی‌یابد که این مورد بر خلاف مدل میانگین- واریانس

1- Modern Portfolio Theory

است.

۳) استفاده از ضریب بتا به عنوان ضریب ریسک هر دارایی نوسانات بازار را در نظر می‌گیرد.

در این مقاله مدلی بر اساس مدل میانگین ـ واریانس جهت مدل سازی مسأله انتخاب سبد سهام بهینه چند هدفه ارائه شده است که از ضرایب بتا در تابع هدف ریسک مدل مارکویتز استفاده می‌کند. از روش‌های بهینه‌سازی مسائل چند هدفه می‌توان مدل برنامه‌ریزی سازشی[1] (CP) را نام برد که اولین بار توسط زلنی (۱۹۷۳ و ۱۹۷۴) معرفی گردید. در مدل CP تصمیم گیرندگان به سهولت و با دقت قابلیت دستیابی به مقادیر ایده‌آل اهداف مورد نظر را خواهند داشت. از دیگر مزایای این مدل می‌توان سادگی و استفاده از آن تحت شرایطی که دسترسی به مقادیر آرمانی اهداف میسر نباشد را عنوان کرد. مدل CP در ادبیات مالی توسط رومرو و رهمن (۱۹۸۴ و ۱۹۸۵) و رومرو و همکارانش (۱۹۸۷) معرفی گردید. همچنین در مورد ادبیات به کارگیری مدل CP در زمینه بهینه‌سازی سبدهای مالی، می‌توان تحقیقات بالسترو و رومرو (۱۹۹۶) و بالسترو (۱۹۹۸) را نام برد. بالسترو و همکاران (۲۰۰۳) و پرز ـ گلادیش و همکارانش (۲۰۰۷) نیز از مدل CP برای بهینه‌سازی برخی مسائل اقتصادی استفاده کردند.

مدل CP در مبانی نظری تنها بر اساس مقادیر ایده‌آل هر یک از اهداف فرموله شده است. در این مقاله مدل CP بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل[2] توسعه می‌یابد و مدل جدیدی تحت عنوان برنامه‌ریزی سازشی ضد ایده‌آل (NCP) ارائه می‌شود که از آن برای بهینه‌سازی مدل به دست آمده از مسأله انتخاب سبد سهام بهینه چند هدفه در بازار سهام ایران استفاده و نتایج آن با نتایج مدل CP تحت شرایط یکسان مقایسه خواهند شد.

تعریف مسأله انتخاب سبد مالی

اولین بار در سال ۱۹۵۲، مارکویتز الگوی حل مسأله انتخاب سبد مالی بهینه را

1- Compromise Programming
2- Nadir Values

ارائه داد. مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز، بر اساس سطح مشخصی از مقادیر بازده، مقادیر بهینه ریسک را براساس حداقل کردن واریانس مجموع دارایی‌های درون سبد مالی به دست می‌آورد (مارکویتز، ۱۹۵۲). بطوری که مدل دو هدفه ریسک ـ بازده مارکویتز را می‌توان به صورت مدل (۱) نوشت:

$$\begin{aligned}&\text{Min} \quad \text{Var}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} r_j x_j\right)\\&\text{Max} \quad \text{E}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} r_j x_j\right)\\&\text{S.T.}\\&\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j = 1\\&x_j \geq 0 \quad \forall j = 1,2,\ldots,n\end{aligned}$$

مدل (۱)

بطوری که:

j = تعداد دارایی‌های موجود در یک سبد مالی (برای $\forall j = 1,2,\ldots,n$)

x_j = متغیر تصمیم سهم دارایی jام ($\forall j = 1,2,\ldots,n$) در یک سبد مالی

r_j = متغیر تصادفی بازده روزانه دارایی jام ($\forall j = 1,2,\ldots,n$)، بطوری که:

$$r_j \in Normal\ (\mu_j, \sigma_j^2)$$

μ_j = میانگین بازده روزانه دارایی jام ($\forall j = 1,2,\ldots,n$)

σ_j^2 = واریانس بازده روزانه دارایی jام ($\forall j = 1,2,\ldots,n$)

در مدل (۱)، هدف کاهش مقدار ریسک سرمایه‌گذاری و افزایش مقدار نرخ بازده سـ مایه‌گذاری است. در حالت کلی، تابع هدف $\text{Min} \quad \text{Var}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} r_j x_j\right)$، مربوط است به کمینه‌سازی مقدار ریسک سرمایه‌گذاری دارایی‌های موجود در سبد مالی و $\text{Max} \quad \text{E}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} r_j x_j\right)$، نیز مربوط به بیشینه‌سازی مقدار بازده حاصل از سرمایه‌گذاری دارایی‌های موجود در سبد مالی است. محدودیت $\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_j = 1$ نیز همان محدودیت موجود در مدل اولیه واریانس ـ کوواریانس است که در اینجا نیز آورده شده است. این محدودیت دلالت بر این دارد که مجموع سهام کل دارایی‌های موجود در یک سبد مالی همواره برابر عدد یک خواهد بود. قیود

$x_j \geq ۰$ (برای $\forall j = ۱,۲,...,n$) نیز، نامنفی بودن مقادیر سهم هر دارایی درون سبد مالی را تضمین خواهد کرد.

مسأله پیشنهادی انتخاب سبد مالی

باتوجه به معایب مدل (۱) و مزایای استفاده از ضریب بتا به عنوان ضرایب ریسک (که در بخش مقدمه به تفصیل تشریح گردیدند)، می‌توان مسأله چند هدفه انتخاب سبد مالی را به صورت مدل (۲) پیشنهاد داد:

$$
\begin{aligned}
&\text{opt} \quad f_۱ = \sum_{j=۱}^{n} \beta_j x_j \\
&\max \quad f_۲ = \sum_{j=۱}^{n} \mu_j x_j \\
&\min \quad f_۳ = \sum_{j=۱}^{n} P_j x_j \\
&\text{S.T.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} x_j = ۱ \\
&r > ۰ \quad \forall i = ۱\ ۲ \quad n
\end{aligned}
\qquad \text{مدل (۲)}
$$

در مدل (۲)، تابع هدف خطی اول عبارت است از $\sum_{j=۱}^{n} \beta_j x_j$ که مربوط به ریسک سرمایه‌گذاری است. بطوری که با استفاده از رابطه ضریب بتا $\left(\beta_j = \operatorname{cov}(r_j, r_m) / Var(r_m)\right)$ ضرایب ریسک هر دارایی محاسبه می‌شود. r_j متغیر تصادفی بازده روزانه دارایی j ام است که دارای توزیع نرمال با میانگین μ_j و واریانس $\sigma_j^۲$ است و r_m نیز متغیر تصادفی بازده روزانه بازار است. $\operatorname{Cov}(r_j, r_m)$، کوواریانس بازده دارایی jام و بازده بازار است و $\operatorname{Var}(r_m)$ نیز واریانس بازده بازار یا ریسک بازار است. x_j نیز متغیر تصمیم سرمایه‌گذاری در دارایی jام است. این تابع هدف، اطمینان به بازده دارایی روی بازار را نشان می‌دهد. همبستگی پایین با بازار، عملکرد دارایی را روی خودش نشان می‌دهد، به جای آنکه توسط تغییرات بازار نمایش داده شود. به منظور انتخاب یک سبد دارایی به همان اندازه پر خطر، در چنین بازاری، مقدار آرمانی این تابع هدف برابر ۱ در نظر گرفته شده است (لی و چسر،

۱۹۸۰). تابع هدف خطی دوم عبارت است از: $E\left(\sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$، که مربوط به نرخ بازده سرمایه‌گذاری می‌باشد، بطوری که $r_j = \left(P_{jt} - P_{jt-1} + D_{jt}\right) / P_{jt-1}$ متغیر تصادفی بازده روزانه دارایی j ام و $P_{j,t}$ قیمت دارایی j ام در روز t ام است. همینطور $D_{j,t}$ مقدار سود تقسیم شده در بازه زمانی $[t-1, t]$ است. هدف از این تابع هدف، ماکزیمم کردن میانگین بازده روزانه دارایی‌ها است. تابع هدف خطی سوم عبارت است از: $\sum_{j=1}^{n} P_j x_j$، که مربوط به هزینه اولیه سرمایه‌گذاری است. در این تابع هدف، P_j قیمت دارایی j ام در آخرین روز دوره مطالعه (با واحد پولی مشخص) است. در دنیای واقعی، بسیاری از افراد به دلیل عدم داشتن پول کافی، نمی‌توانند در سرمایه‌گذاری‌های مطمئن شرکت کنند. بنابراین هدف ما این است که آنها علاوه بر هزینه کردن پول کمتر بتوانند نتایج دلخواه را از سایر اهداف سرمایه‌گذاری نیز به دست آورند. اگر N تعداد کل دارایی‌های موجود در سبد مالی بهینه باشد، می‌توان در حالت کلی این تابع هدف را مستقل از مقدار N به صورت زیر به دست آورد.

$$Z = P_1(Nx_1) + P_2(Nx_2) + \dots + P_n(Nx_n) \Rightarrow Z = N\,(P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n)$$

$$\Rightarrow Z = N\,(\textstyle\sum_{j=1}^{n} P_j x_j) \Rightarrow \dfrac{Z}{N} = \dfrac{N\,(\sum_{j=1}^{n} P_j x_j)}{N} \Rightarrow \dfrac{Z}{N} = f_3 = \textstyle\sum_{j=1}^{n} P_j x_j$$

بطوری که مقدار هزینه نهایی انتخاب و تخصیص سبد مالی بهینه برابر با $Z^* = f_3^* N$ است. برای خرید دارایی j ام، قیمت آخرین روز بازه زمانی دارایی j ام منظور و این تابع هدف می‌نیمم می‌شود.

مدل برنامه‌ریزی سازشی (CP)

در مدل CP، چنانچه سطوح موجود توسط f_k و مقادیر ایده‌آل تابع هدف k ام توسط f_k^* نمایش داده شوند و ماکزیمم کردن اهداف مد نظر باشد، آنگاه مقادیر f_k^{max} از طریق مدل (۳) به دست می‌آید.

مدل (۳)

$$
\begin{aligned}
& f_k^{\max} = \max f_k \qquad \forall k = 1,2,\ldots,k \\
& s.t. \\
& g_i(x) \le b_i \qquad \forall i = 1,2,\ldots,m \\
& x \in S
\end{aligned}
$$

و در نهایت مدل نهایی CP در صورت وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر مدل سازی می‌شود:

مدل (٤)

$$
\begin{aligned}
& \min\left(\sum_{k=1}^{K} w_k \left(\delta_k^-\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& S.T. \\
& f_k + \delta_k^- = f_k^{\max} \qquad \forall k = 1,2,\ldots, K \\
& g_i(x) \le b_i \qquad \forall i = 1,2,\ldots, m \\
& x \in S \\
& \delta_k^- \ge 0 \qquad \forall k = 1,2,\ldots, K
\end{aligned}
$$

متغیر δ_k^-، متغیر انحرافی کمبود متعلق به محدودیت تابع هدف k ام است. اگر در مدل CP می‌نیمم کردن اهداف مدنظر باشد، آنگاه مقادیر $\mathrm{f}_{\mathrm{k}}^{\min}$ از طریق مدل (۵) به دست می‌آید.

مدل (۵)

$$
\begin{aligned}
& f_k^{\min} = \min f_k \qquad \forall k = 1,2,\ldots,k \\
& S.T. \\
& g_i(x) \le b_i \qquad \forall i = 1,2,\ldots,m \\
& x \in S
\end{aligned}
$$

در این صورت مدل نهایی CP با وجود اوزان اهمیت اهداف، به صورت زیر خواهد بود.

مدل (۶)

$$\min\left(\sum_{k=1}^{K} w_k\left(\delta_k^+\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$S.T.$$
$$f_k-\delta_k^+=f_k^{\min} \quad \forall k=1,2,\ldots,K$$
$$g_i(x)\le b_i \quad \forall i=1,2,\ldots,m$$
$$x\in S$$
$$\delta_k^+\ge 0 \quad \forall k=1,2,\ldots,K$$

متغیر δ_k^+ متغیر انحرافی مازاد متعلق به محدودیت مربوط به تابع هدف k ام است.

مدل CP بر اساس انتخاب جواب‌هایی که به نقاط ایده‌آل ($f_k^{\max}$ یا $f_k^{\min}$) نزدیکتر باشند، مدل سازی می‌شود. پارامتر P از تابع مطلوبیت نهایی است که معیارهای مورد نظر را با فرض $P=\{1,2,\ldots\}\cup\{\infty\}$ به نمایش می گذارد. همچنین $w_k \succ 0$ (برای همه مقادیرk) و $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$ است. به عبارتی w_kها، وزن (ارزش) نسبی اهمیت تابع هدف k ام را در مقابل $k-1$ هدف دیگر نمایش می‌دهد. $L_{P=1}$ به عنوان معیار منهتن[1] و $L_{P=2}$ به عنوان معیار اقلیـدوسی[2] و $L_{P=\infty}$ نیز معیار چبی شف[3] نامیده می‌شوند. در مورد $L_{P=\infty}$ حالت تبدیل شده مدل (۴) به مدل مین- ماکس برنامه‌ریزی سازشی ((CP(min-max)) به صورت مدل (۷) خواهد بود.

مدل (۷)

$$\min y$$
$$S.T.$$
$$y\ge\sum_{k=1}^{K} w_k\left(\delta_k^-\right)$$
$$f_k+\delta_k^-=f_k^{\max} \quad \forall k=1,2,\ldots,K$$
$$g_i(x)\le b_i \quad \forall i=1,2,\ldots,m$$
$$x\in S$$
$$y\ge 0,\delta_k^-\ge 0 \quad \forall k=1,2,\ldots,K$$

1- Manhattan Metric
2- Euclidean Metric
3- Tchebycheff Metric

مدل پیشنهادی NCP

روش CP تنها مجموع انحرافات سطوح موجود اهداف را نسبت به مقادیر ایده‌آل هر یک، از اهداف، می‌نیمم می‌سازد. در اینجا مدلی بر اساس مدل CP با در نظر گرفتن حداکثر دوری از مقادیر ضد ایده‌آل هریک از اهداف پیشنهاد و ارائه شده است.

اگر هدف، بهینه‌سازی تابع هدف k ام بر اساس مقادیر آرمانی باشد، آنگاه تابع هدف به صورت زیر خواهد بود.

$$opt \quad f_k \quad (\forall k = ۱,۲,\ldots, K)$$.۱

همچنین اگر $f_{(k)} \in R$ مقدار آرمانی تابع هدف k ام باشد، در این صورت محدودیت نظیر این تابع هدف در روش NCP به صورت رابطه زیر خواهد بود.

$$f_{(k)} \geq f_k \geq f_{(k)} \approx f_k = f_{(k)}$$.۲

بطوری که محدودیت دو سویه بالا را می‌توان به دو محدودیت $\geq$ و $\leq$ تبدیل نمود.

$$f_k \geq f_{(k)}$$
$$f_k \leq f_{(k)}$$.۳

در نتیجه مدل NCP با وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر خواهد بود.

مدل (۸)

$$\min\left(\sum_{k=۱}^{K} w_k \left(\delta_k^+ + \delta_k^-\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$S.T.$$
$$f_k - \delta_k^+ = f_{(k)} \qquad \forall k = ۱,۲,\ldots, K$$
$$f_k + \delta_k^- = f_{(k)} \qquad \forall k = ۱,۲,\ldots, K$$
$$x \in S$$
$$f_{(k)} \in R, \delta_k^-, \delta_k^+ \geq ۰ \quad \forall k = ۱,۲,\ldots, K$$

در مدل (۸) هدف می‌نیمم کردن متغیرهای δ_k^- و δ_k^+ به منظور نزدیکی بیشتر به

مقدار آرمانی تابع هدف k ام است. اگر هدف می‌نیمم سازی تابع هدف k ام بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل باشد، آنگاه تابع هدف زیر به دست می‌آید.

۴. $$\min \quad f_k \quad (\forall k = 1,2,\dots,K)$$

چنانچه f_{k^*} مقدار ضد ایده‌آل تابع هدف k ام باشد، آنگاه محدودیت نظیر این تابع هدف در روش NCP به صورت زیر خواهد بود.

۵. $$f_{k^*} \geq f_k$$

در نتیجه مدل NCP با وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر خواهد بود.

مدل (۹)

$$\min\left(\sum_{k=1}^{K} w_k \left(-\delta_k^-\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$S.T.$$
$$f_k + \delta_k^- = f_{k^*} \qquad \forall k = 1,2,\dots,K$$
$$x \in S$$
$$\delta_k^- \geq 0 \qquad \forall k = 1,2,\dots,K$$

در محدودیت $(\forall k = 1,2,\dots,K)$ $f_k + \delta_k^- = f_{k^*}$، هدف ماکزیمم کردن δ_k^- به منظور دوری بیشتر از مقدار ضد ایده‌آل تابع هدف k ام است. اگر هدف ماکزیمم سازی تابع هدف k ام بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل باشد، آنگاه تابع هدف به صورت زیر است.

۶. $$\max \quad f_k \quad (\forall k = 1,2,\dots,K)$$

بطوری که محدودیت نظیر این تابع هدف در روش NCP به صورت زیر خواهد بود:

۷. $$f_k \geq f_{k^*}$$

در نتیجه مدل NCP با وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر است.

مدل (۱۰)

$$\min\left(\sum_{k=1}^{K} w_k\left(-\delta_k^+\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$S.T.$$
$$f_k-\delta_k^+=f_{k^*}\qquad \forall k=1,2,\dots,K$$
$$x\in S$$
$$\delta_k^+\ge 0\qquad \forall k=1,2,\dots,K$$

همچنین در محدودیت $(\forall k=1,2,\dots,K)\quad f_k-\delta_k^+=f_{k^*}$، هدف ماکزیمم کردن δ_k^+ به منظور دوری بیشتر از مقدار ضد آیده‌آل تابع هدف kام است. بنابراین در حالت کلی، چنانچه تعداد A تابع هدف از نوع بهینه‌سازی بر اساس مقادیر آرمانی و تعداد B تابع هدف از نوع می‌نیمم سازی و تعداد C تابع هدف از نوع ماکزیمم سازی باشند، می‌توان مدل نهایی NCP را به صورت مدل (۱۱) نوشت.

مدل (۱۱)

$$\min\quad \left\{\sum_{a=1}^{A} w_a(\delta_a^+ +\delta_a^-)^P+\sum_{b=1}^{B} w_b(-\delta_b^-)^P+\sum_{c=1}^{C} w_c(-\delta_c^+)^P\right\}^{\frac{1}{P}}$$
$$S.T$$
$$\begin{cases} f_a-\delta_a^+=f_{(a)} & \forall a=1,2,\dots,A\\ f_a+\delta_a^-=f_{(a)} & \forall a=1,2,\dots,A\end{cases}$$
$$f_b+\delta_b^-=f_{b^*}\qquad \forall b=1,2,\dots,B$$
$$f_c-\delta_c^+=f_{c^*}\qquad \forall c=1,2,\dots,C$$
$$x\in S$$
$$\delta_a^-,\delta_a^+\ge 0;\delta_b^-\ge 0;\delta_c^+\ge 0\qquad \forall a=1,2,\dots,A\ ;\forall b=1,2,\dots,B\ ;\forall c=1,2,\dots,C$$
$$f_{(a)}\in \mathbf{R}\qquad \forall a=1,2,\dots,A$$

بطوری که $\sum_{a=1}^{A} w_a+\sum_{b=1}^{B} w_b+\sum_{c=1}^{C} w_c=1$ ($w_a, w_b, w_c \ge 0$؛ a=1,2,…,A، b=1,2,…,B و c=1,2,…,C) است.

مثال عددی

به منظور پیاده‌سازی و تشریح مدل پیشنهادی NCP، در این بخش یک مثال عددی پیرامون انتخاب سبد سهام بهینه از بازار سهام ایران ارائه می‌شود. در این مثال از داده‌های روزانه مربوط به ۳۵ شاخص سهام مبادله شده در بازار سهام ایران استفاده

شده است. این داده‌ها متعلق به بازه زمانی سال‌های ۱۳۸۶ تا ۱۳۸۷ می‌باشند. همچنین برای مدل‌سازی مسأله انتخاب سبد سهام بهینه، از مدل (۲) و برخی محدودیت‌های مازاد دیگر استفاده می‌شود. این محدودیت‌ها که متناسب با مثال عددی می‌باشند، عبارتند از:

(۱) به منظور تنوع بخشیدن در سبد سهام انتخاب شده، سهم هر سهام در سبد بهینه بین صفر و ۰/۱ می‌باشد ($۰ \le x_j \le ۰/۱$).

(۲) از میان ۳۵ سهام مورد مطالعه، ۴ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در بخش خودروسازی، ۲ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در بخش بانک، ۳ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در بخش لیزینگ، ۹ سهام مربوط به بخش سرمایه‌گذاری‌ها و ۱۷ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در سایر بخش‌ها است. به منظور تنوع بخشیدن در سبد سهام انتخاب شده، پیشنهاد می‌شود ۲۰٪ سرمایه‌گذاری کل سبد سهام بهینه متعلق به هریک از بخش‌های سرمایه‌گذاری باشد که در این صورت مجموع این محدودیت‌ها برابر است با $\sum_{j=1}^{n} x_j = ۱$. بنابراین مدل نهایی انتخاب سبد سهام بهینه، مطابق مدل (۱۲) خواهد بود.

مدل (۱۲)

$$
\begin{aligned}
&\text{opt} \quad f_1 = \sum_{j=1}^{35} \beta_j x_j \\
&\text{max} \quad f_2 = \sum_{j=1}^{35} \mu_j x_j \\
&\text{min} \quad f_3 = \sum_{j=1}^{35} P_j x_j \\
&\text{subject to:} \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2 \\
&x_5 + x_6 = 0/2 \\
&x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2 \\
&x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2 \\
&x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \\
&+ x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2
\end{aligned}
$$

حال با توجه به اهداف و محدودیت‌های مدل (۱۲)، می‌توان مدل NCP را برای حل آن اجرا نمود. برای این منظور ابتدا باید مقدار آرمانی تابع هدف اول را تعیین و

مقادیر ضد ایده‌آل توابع هدف دوم و سوم را به دست آورد. برای تابع هدف اول نیز مقدار آرمانی ۱ در نظر گرفته می‌شود. برای تابع هدف دوم، مدل به دست آوردن مقدار ضد ایده‌آل به صورت زیر است:

مدل (۱۳)

$$
\begin{aligned}
& f_{2*} = \min \ \sum_{j=1}^{35} \mu_j x_j \\
& \text{subject to:} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2 \\
& x_5 + x_6 = 0/2 \\
& x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2 \\
& x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2 \\
& x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \\
& + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2 \\
& 0 \le x_j \le 0/1 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, 35
\end{aligned}
$$

همچنین برای تابع هدف سوم، مدل مقدار ضد ایده‌آل به صورت زیر است:

مدل (۱٤)

$$
\begin{aligned}
& f_{3*} = \max \ \sum_{j=1}^{35} P_j x_j \\
& \text{subject to:} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2 \\
& x_5 + x_6 = 0/2 \\
& x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2 \\
& x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \div x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2 \\
& x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \\
& + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2 \\
& 0 \le x_j \le 0/1 \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, 35
\end{aligned}
$$

برای استفاده از روش NCP معیار چبی شف ($L_{P=\infty}$) در نظر گرفته شده است، بطوری که مدل NCP در حالت مین- ماکس در مورد مسأله انتخاب سبد سهام بهینه به صورت مدل (۱۵) خواهد بود.

مدل (۱۵)

$$
\begin{aligned}
&\min \quad y \\
&\text{subject to:} \\
&y \geq w_{۱}(\delta_{۱}^{+} + \delta_{۱}^{-}) \\
&y \geq w_{۲}(-\delta_{۲}^{+}) \\
&y \geq w_{۳}(-\delta_{۳}^{-}) \\
&\begin{cases} f_{۱} - \delta_{۱}^{+} = ۱ \\ f_{۱} + \delta_{۱}^{-} = ۱ \end{cases} \\
&f_{۲} - \delta_{۲}^{+} = f_{۲*} \\
&f_{۳} + \delta_{۳}^{-} = f_{۳*} \\
&x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} + x_{۱۵} = ۰/۲ \\
&x_{۵} + x_{۶} = ۰/۲ \\
&x_{۷} + x_{۸} + x_{۳۳} = ۰/۲ \\
&x_{۴} + x_{۱۶} + x_{۱۷} + x_{۱۸} + x_{۱۹} + x_{۲۰} + x_{۲۱} + x_{۲۲} + x_{۲۳} = ۰/۲ \\
&x_{۹} + x_{۱۰} + x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۱۳} + x_{۱۴} + x_{۲۴} + x_{۲۵} + x_{۲۶} + x_{۲۷} + x_{۲۸} \\
&+ x_{۲۹} + x_{۳۰} + x_{۳۱} + x_{۳۲} + x_{۳۴} + x_{۳۵} = ۰/۲ \\
&۰ \leq x_{j} \leq ۰/۱ \qquad \forall j = ۱, ۲, \ldots, ۳۵ \\
&y \geq ۰;\ \delta_{۱}^{-}, \delta_{۱}^{+} \geq ۰;\ \delta_{۲}^{+} \geq ۰;\ \delta_{۳}^{-} \geq ۰
\end{aligned}
$$

در جدول (۱)، مقادیر ضرایب پارامترهای موجود در محدودیت‌های مدل‌های CP(min-max) و NCP(min-max)، براساس داده‌های تاریخی روزانه سهام‌ها در سال‌های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷ نشان داده شده است. جدول (۲) نیز مقادیر ایده‌آل (بهترین مقادیر) و ضد ایده‌آل (بدترین مقادیر) هریک از اهداف را نشان می‌دهد. بطوری که مقدار آرمانی $f_{۱}$ برابر ۱ در نظر گرفته شده است. تحت شرایط یکسان و با فرض یکسان بودن اهمیت اهداف $\left(w_{۱} = w_{۲} = w_{۳} = \frac{۱}{۳}\right)$، دو مدل CP(min-max) و NCP(min-max) با استفاده از بسته نرم افزاری Lingo 8.0 بهینه‌سازی شده است. بر این اساس در جدول (۳)، دو سبد سهام بهینه بر اساس مدل‌های CP(min-max) و NCP(min-max) نشان داده شده است. مقادیر بهینه هر یک از اهداف نیز با توجه به مدل‌های CP(min-max) و NCP(min-max) در جدول (۴) به نمایش در

آمده‌اند.

باید گفت که روش NCP(min-max) در مورد توابع هدف f_1 و f_2، نتایج بسیار بهتری را با توجه به مقادیر ایده‌آل هریک از اهداف نشان می‌دهد، بطوری که حتی در مورد تابع هدف f_1، مقدار آرمانی مورد نظر تصمیم گیرنده بطور کامل برآورده شده است و این در حالی است که در روش CP(min-max) مقدار بهینه به دست آمده از تابع هدف f_1 کمتر از ۰/۷ بوده است. همچنین روش CP(min-max) تنها در مورد تابع هدف f_3، با اختلاف اندکی (تقریباً ۳۹ ریال) نتیجه بهتری را نسبت به روش NCP (min-max) نشان می‌دهد. بطوری که در مدل NCP (min-max)، مقدار f_3 در مقایسه با مقدار ضد ایده‌آل این تابع هدف، مطلوب به نظر می‌رسد.

جدول ۱ . مقادیر ضرایب موجود در محدودیت‌ها

سهام‌ها (j)	میانگین نرخ بازده (μ_j)	ضریب ریسک بتا (β_j)	قیمت هر سهم در آخرین روز معامله (ریال) (P_j)
پارس خودرو	۰/۰۰۰۰۴۲۳	-۱/۰۳۸۱۵	۱۲۷۵
محورسازان ایران خودرو	-۰/۰۰۰۶۴۳۷	۱/۱۵۰۶۵	۷۰۰
سایپا	۰/۰۰۱۵۹۹۴	۰/۱۷۸۱۲	۸۲۶
سرمایه گذاری رایان سایپا	۰/۰۰۲۷۱۴۸	۰/۶۰۰۲۵	۱۰۲۷
بانک پارسیان	۰/۰۰۲۱۱۱۴	۱/۰۵۶۰۶	۲۳۳۰
بانک کارآفرین	۰/۰۰۱۰۶۸۵	-۱/۴۵۴۰۷	۳۴۲۷
لیزینگ ایران	۰/۰۰۱۷۷۱۷	-۱/۰۲۳۶۹	۹۵۱
لیزینگ صنعت و معدن	۰/۰۰۲۲۲۴۹	۱/۲۳۰۰۷	۹۶۷
آلومینیوم پارس	-۰/۰۰۰۱۸۳۸	۲/۱۴۹۵۶	۹۴۸
آلوم تک	۰/۰۰۱۶۲۶۴	-۰/۸۲۳۰۱	۸۳۸۵
بهنوش ایران	-۰/۰۰۰۴۷۸۰	-۰/۰۰۱۲۵	۹۵۷۳
پارس مینو	-۰/۰۰۲۱۹۰۱	۳/۶۷۸۹۱	۵۳۴
پشم شیشه ایران	۰/۰۰۱۱۴۳۳	۱/۶۷۹۲۱	۱۱۸۰
چینی ایران	۰/۰۰۱۱۴۳۳	۲/۱۲۰۰۳	۱۱۸۰
سایپا دیزل	-۰/۰۰۰۴۹۵۶	۰/۰۹۷۸۲	۸۶۹
سرمایه گذاری بانک ملی ایران	-۰/۰۰۱۲۳۶۶	۰/۳۲۵۰۷	۱۱۳۶
سرمایه گذاری بهمن	۰/۰۰۰۰۳۶۳	-۰/۲۱۳۶۶	۱۰۲۷
سرمایه گذاری توسعه ملی	۰/۰۰۰۰۶۳۳	-۲/۳۰۰۵۱	۹۰۰
سرمایه گذاری سایپا	۰/۰۰۰۷۱۲۵	۴/۰۳۲۳۱	۹۹۸
سرمایه گذاری سپه	۰/۰۰۰۲۰۵۲	۱/۲۵۳۶۲	۱۰۳۲
سرمایه گذاری صندوق بازنشستگی	۰/۰۰۰۸۰۵۳	۰/۰۰۲۶۳	۲۲۶۹
سرمایه گذاری صنعت نفت	۰/۰۰۰۵۹۰۴	-۱/۱۲۳۶۵	۱۶۰۶
سرمایه گذاری صنعت معدن	-۰/۰۰۲۰۲۳۱	۱/۲۳۴۵۲	۱۰۲۰
سیمان اردبیل	-۰/۰۰۰۴۸۱۲	۱/۱۴۰۲۹	۱۹۵۷۶
سیمان شمال	-۰/۰۰۲۳۲۴۶	۰/۷۵۲۸۱	۴۵۵۲
سیمان صوفیان	-۰/۰۰۰۳۴۸۹	-۱/۰۶۳۹۵	۴۱۷۳
شیشه و گاز	۰/۰۰۱۸۳۴۲	۲/۱۴۳۶۳	۱۰۸۰
فولاد مبارکه	۰/۰۰۳۳۵۵۶	۰/۰۵۰۲۳	۷۹۶
کاشی اصفهان	۰/۰۰۲۶۲۵۸	۰/۰۲۱۴۸	۲۲۵۰
کربن ایران	-۰/۰۰۱۳۹۷۵	۰/۱۰۲۳۶	۱۰۳۸
گروه صنعتی ملی	۰/۰۰۰۵۹۰۴	۱/۳۳۵۲۳	۱۶۰۶
لبنیات میهن	-۰/۰۰۰۹۰۱۰	-۱/۱۹۲۳۷	۱۰۳۸

جدول ۲. مقادیر ایده‌آل و ضد ایده‌آل هر یک از اهداف (برای k = ۳،۲)

توابع هدف	مقادیر ایده آل (f_k^*)	مقادیر ضد ایده آل (f_{k*})
$f_۲$	۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۰۶
$f_۳$	۱۲۴۲/۹	۴۲۹۳/۴

جدول۳. مقادیر بهینه سبدهای سهام روش‌های CP(min-max) و NCP(min-max)

سهام‌ها (j)	سبد سهام روش CP(min-max)	سبد سهام روش NCP(min-max)
پارس خودرو	۰	۰
محورسازان ایران خودرو	۰/۱	۰/۱
سایپا	۰/۱	۰/۱
سرمایه‌گذاری رایان سایپا	۰	۰/۱
بانک پارسیان	۰/۱	۰/۱
بانک کارآفرین	۰/۱	۰/۱
لیزینگ ایران	۰/۱	۰/۱
لیزینگ صنعت و معدن	۰/۱	۰/۱
آلومینیوم پارس	۰	۰/۱

ادامه جدول ۳. مقادیر بهینه سبدهای سهام روش‌های CP(min-max) و NCP(min-max)

سهام‌ها (j)	سبد سهام روش CP(min-max)	سبد سهام روش NCP(min-max)
آلوم تک	۰	۰
بهنوش ایران	۰	۰
پارس مینو	۰/۱	۰/۰۵۵۹۶
پشم شیشه ایران	۰	۰
چینی ایران	۰	۰
سایپا دیزل	۰	۰
سرمایه‌گذاری بانک ملی ایران	۰	۰
سرمایه‌گذاری بهمن	۰	۰
سرمایه‌گذاری توسعه ملی	۰/۰۹۷۲۵	۰
سرمایه‌گذاری سایپا	۰/۱	۰/۱
سرمایه‌گذاری سپه	۰	۰
سرمایه‌گذاری صندوق بازنشستگی	۰	۰
سرمایه‌گذاری صنعت نفت	۰	۰
سرمایه‌گذاری صنعت معدن	۰/۰۰۲۷۵	۰
سیمان اردبیل	۰	۰
سیمان شمال	۰	۰
سیمان صوفیان	۰	۰
شیشه و گاز	۰	۰
فولاد مبارکه	۰/۱	۰/۰۴۴۰۴
کاشی اصفهان	۰	۰
کربن ایران	۰	۰
گروه صنعتی ملی	۰	۰
لبنیات میهن	۰	۰
لیزینگ خودرو غدیر	۰	۰
نفت ایران	۰	۰
نورد آلومینیوم	۰	۰

جدول٤. مقادیر بهینه توابع هدف روشهای CP(min-max) و NCP(min-max)

(برای k = ۱، ۳،۲)

توابع هدف	روش CP(min-max)	روش NCP(min-max)
f_1	۰/۶۶۹۵	۱
f_2	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱۲
f_3	۱۲۴۳/۲	۱۲۸۲/۳

نتایج به دست آمده از هر دو روش، قابل قبول و بهینه می‌باشند ولی ذکر این نکته الزامی است که وجود یک سرمایه‌گذاری موفق و بهینه در سایه سازگاری بیشتر با خواسته‌های تصمیم گیرنده است. به نظر می‌رسد تحت شرایط یکسان نتایج روش NCP(min-max) سازگاری بیشتری با خواسته‌های تصمیم گیرنده دارند. بطوری که شاید بتوان گفت این سازگاری بیشتر، محصول مدل سازی بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل هریک از اهداف در این روش است.

نتیجه گیری

با وجود بنیادین بودن مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز در مسأله انتخاب سبد مالی بهینه، همواره انتقاداتی به دلیل کوآدراتیک بودن و استفاده از ماتریس کوواریانس در تابع هدف ریسک این مدل وجود داشته است. از اینرو مشاهده شد که استفاده از ضریب ریسک بتا می‌تواند جایگزین مناسبی جهت مدل سازی تابع هدف ریسک سرمایه‌گذاری محسوب شود. در این مقاله پس از معرفی روشCP، مدل NCP برای بهینه‌سازی مسائل چند هدفه پیشنهاد شده است. این مدل بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل فرموله می‌شود. از آنجایی که تصمیم‌گیری در مورد سرمایه‌گذاری در سبدهای مالی بسیار حساس است، لذا هدف اصلی از ارائه این مدل، کسب نتایج مطلوب‌تر از فرایند بهینه‌سازی بوده است.

برای انتخاب سبد سهام بهینه در بازار سهام ایران، مدلی چند هدفه معرفی و مقادیر ایده‌آل و ضد ایده‌آل هر یک از اهداف جداگانه محاسبه گردید. پس از بهینه‌سازی دو روش CP(min-max) وNCP(min-max) تحت شرایط یکسان، نتایج

به دست آمده مؤید این بودند که با وجود بهینه و موجه بودن هر دو سبد سهام، روش NCP(min-max) خواسته‌های تصمیم گیرنده را به شکل بهتری برآورده می‌سازد.

منابع و ماخذ

Ballestero, E., and Romero, C. (1996). Portfolio selection: A compromise programming solution. ***Journal of Operational Research Society***, 47(11), pp. 1377–1386.

Ballestero, E. (1998). Approximating the optimum portfolio for an investor with particular preferences. ***Journal of Operational Research Society***, 49(9), pp. 998–1000.

Ballestero, E., Anton, JM., and Bielza, C. (2003). Compromise-based approach to road project selection in Madrid metropolitan area. ***Journal of Operational Research Society Japan***, 46(1), pp. 99–122.

Bell, D.E., Raiffa, H., and Tversky, A. (1988). Risky choice revisited. In D.E. Bell (Ed.), ***Decision Making: Descriptive, normative and prescriptive interactions*** (pp.99–112). Cambridge: Cambridge University Press.

Elton, E.J., Gruber, M.J., and Padberg, M. (1976). Simple rules for optimal portfolio selection. ***Journal of Finance***, 31, pp. 1341–1357.

Konno, H. (1990). Piecewise linear risk function and portfolio optimization. ***Journal of Operational Research Society Japan***, 33(2), pp. 139–156.

Konno, H., and Yamazaki, H. (1991). Mean absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. ***Management Science***, 37(5), pp. 519–531.

Lee, S.M., and Chesser, D.L. (1980). Goal programming for portfolio selection. ***The Journal of Portfolio Management*** (Spring), pp. 22–26.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. ***The Journal of Finance***, 7(1), pp. 77–91.

Nawrocki, D.N., and Carter, W.L. (1998). Earnings announcements and portfolio selection. Do they add value?. ***International Review of Financial Analysis***, 7(1), pp. 37–50.

Perez-Gladish, B., Jones, D.F., Tamiz, M., and BilbaoTerol, A. (2007). An interactive three-stage model for mutual funds portfolio selection. ***Omega***, 35(1), pp. 75–88.

Romero, C., and Rehman, T. (1984). Goal programming and multiple criteria decision making in farm planning: An expository analysis. Journal ***of Agricultural Economics***, 35, pp. 177–190.

Romero, C., and Rehman, T. (1985). Goal programming and multiple criteria decision making in farm planning: Some extensions. ***Journal of Agricultural Economics***, 36, pp. 171–185.

Romero, C., Amador, F., and Barco, A. (1987). Multiple objectives in agricultural planning: A compromise programming application. ***American Journal of Agricultural Economics***, 69, pp. 78–86.

Sharpe, W.F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. ***Management Science***, 9 (2), pp. 277–293.

Sharpe, W.F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. ***The Journal of Finance***, 19(3), pp. 425–442.

Sharpe, W.F. (1967). A linear programming algorithm for mutual fund portfolio selection. ***Management Science***, 13(7), pp. 499–510.

Shing, C., and Nagasawa, H. (1999).Interactive decision system in stochastic multi-objective portfolio selection. ***International Journal of Production Economics***, 60–61, pp. 187–193.
Young, M. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. ***Management Science***, 44(5), pp. 673–683.
Zeleny, M. (1973). Compromise programming. In J.L. Cochrane and M. Zeleny (Eds), ***Multiple Criteria Decision Making*** (pp. 262–301). Columbia: University of South Carolina Press.
Zeleny, M. (1974). A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal. ***Computers and Operations Research***, 1(3), pp. 479–496.